

### 3. ДРЕВЕСИНОВЕДЕНИЕ. МЕХАНИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДРЕВЕСИНЫ

---

УДК 630\*

И.В. Бачериков, Б.М. Локштанов

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА ЕСТЕСТВЕННОГО ОТКОСА СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

*Введение.* При истечении сыпучего материала на горизонтальную плоскость образуется горка материала с некоторым углом откоса, соответствующим равновесию сыпучих частиц. Статический угол, называемый также углом обрушения, определяется следующим образом:

- прямоугольный сосуд, одна из стенок которого – съемная, заполняется сыпучим материалом;
- после заполнения съемная стенка осторожно удаляется и часть сыпучего материала, находящегося в сосуде, высыпается;
- у оставшегося в сосуде материала поверхность располагается под некоторым углом к горизонтальной плоскости, который и является статическим углом естественного откоса.

Статический угол естественного откоса для большинства насыпных грузов больше динамического угла естественного откоса и соответствует эмпирической зависимости  $\alpha_{0 \text{ стат}} \approx 0,7\alpha_0$ , лишь для идеальных сыпучих грузов  $\alpha_{0 \text{ стат}} \approx \alpha_0$ .

Динамическим углом естественного откоса называется наибольший угол, который образует свободная поверхность насыпного груза с горизонтальной плоскостью (рис. 1).

Величина угла естественного откоса сыпучего материала  $\alpha_0$  связана с силами трения, которые зависят от формы  $h$  и размера частиц  $l$ , влажности  $W$  и температуры  $t$ , липкости  $k_1$  и шершавости поверхности частиц  $k_2$ , а также от состояния опорной поверхности  $k_3$ :

$$\alpha_0 = f(l, h, W, t^\circ, k_1, k_2, k_3). \quad (1)$$

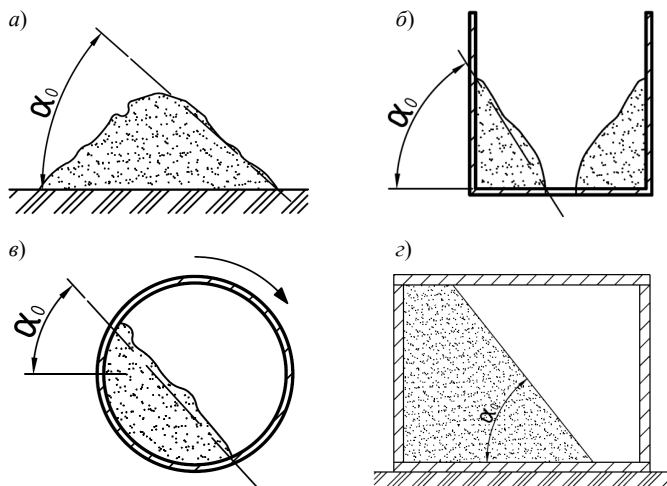


Рис. 1. Способы определения угла естественного откоса

Значение угла естественного откоса изменяется в широких пределах: от 25...35° для хорошо сыпучих (подвижных) материалов и до 60...70° для связных сыпучих материалов. Между подвижностью (сыпучестью) частиц и углом естественного откоса существует обратная зависимость, при наибольшей подвижности частиц угол естественного откоса минимален. При этом величина угла естественного откоса также зависит от выбранного метода определения угла.

Данные по углам естественного откоса для измельченных древесных материалов, по различным источникам, различны, что отражено в табл. 1.

Величину угла естественного откоса  $\alpha_0$  определяют способом, указанным на рис. 1, а, по методу на рис. 2:

- полый цилиндр 1, не имеющий верхнего и нижнего дна, ставят на горизонтальную плоскость 3 и наполняют сыпучим грузом 2 доверху;
- затем цилиндр медленно приподнимают, при этом находившийся в нем сыпучий материал под действием гравитационных сил вытекает и располагается под углом естественного откоса  $\alpha_0$ ;
- угол естественного откоса  $\alpha_0$  определяем при помощи угломера или по формуле

$$\alpha_0 = \arctg\left(\frac{H}{R}\right) = \arctg\left(\frac{2H}{D}\right), \quad (2)$$

где  $H$  – высота кучи сыпучего материала, мм;  $R$  – радиус кучи сыпучего материала, мм ( $R = D/2$ );  $D$  – диаметр кучи сыпучего материала, мм.

Таблица 1

**Сводная таблица значений угла естественного откоса  
измельченных древесных материалов**

Источник	Вид измельченного древесного материала		Угол естественного откоса, град
[Мазарский, 1971]	Щепа	сосна	34,4
		ель	36–39,3
		липа, тополь, осина	31–36
		лиственница	34,6
[www.unionironworks.com]	Древесная пыль		30
	Кора		45
	Щепа		45
[Walter R. Niessen, 2010]	Щепа		45+
[Mi-Rong Wu, 2013]	Щепа		43–47
[Технология ЦБП, 2002]	Щепа	ель, пихта	37
		сосна, кедр	34
		лиственница, береза	35
		осина, тополь	34
	Кора		36
	Опилки		36

Второй способ (см. рис. 1, б) определения угла естественного откоса осуществляется при помощи сосуда с плоским доньшком и задвижкой, закрывающей отверстие, смещенное относительно центра. При открывании задвижки сыпучий материал высыпается из отверстия, а материал, оставшийся в сосуде, образует откос, угол которого является углом естественного откоса.

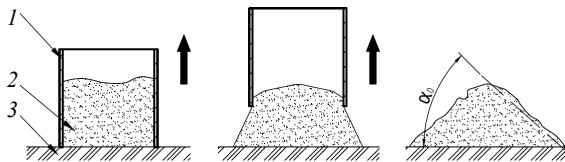


Рис. 2. Метод определения угла естественного откоса при помощи полого цилиндра

Третий способ (см. рис. 1, в) определения угла естественного откоса заключается в следующем:

- во вращающийся барабан с прозрачной стенкой засыпается сыпучий материал;
- при вращении барабана с малыми скоростями материал пересыпается, образуя угол естественного откоса.

При определении угла естественного откоса четвертым методом (см. рис. 1, г) используется простейший прибор (рис. 3) – ящик с прозрачными стенками. Будучи поставленным на меньшее основание (грань), ящик наполняется сыпучим материалом на  $1/2$  объема. При опрокидывании его на длинную грань груз располагается под углом естественного откоса, замеряемого угломером сквозь прозрачную стенку.

Следующий способ (рис. 4) определения угла естественного откоса производится по следующей методике:

- воронку, закрепленную на штативе, опускают до касания с плоскостью;
- затем в воронку засыпают сыпучий материал;
- после засыпки воронку медленно поднимают, и высыпавшийся материал образует конус;
- скорость истечения и расход сыпучего материала регулируются скоростью подъема воронки;
- угол естественного откоса определяется при помощи угломера или по формуле (2).

*Методика исследования.* В данной работе мы проверяем значения угла естественного откоса для опилок и щепы и оцениваем эффективность различных методов его определения.

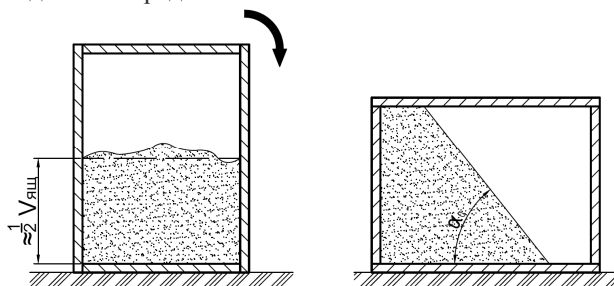


Рис. 3. Метод определения угла естественного откоса при помощи прозрачного ящика

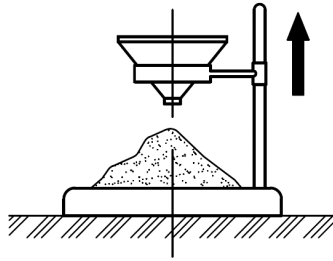


Рис. 4. Метод определения угла естественного откоса при помощи воронки

Фракционный состав исследуемых древесных сыпучих материалов получен сортированием при помощи сит. Из массы опилок отбираем пробу весом 5 кг и методом квартования сокращаем ее до 1 кг, затем просеиваем через набор сит с отверстиями 10, 5, 2, 1, 0,5, 0,25, 0,1 мм.

Определим зависимость угла естественного откоса от фракционного состава сыпучего материала. Для этого выберем опилки фракций на сите 0,5, 1, 2, 5 мм, окрасим их в контрастные цвета и проведем опыты по определению угла естественного откоса методом полого цилиндра (см. рис. 2). Окраску осуществим красителями на водной основе, замочив предварительно отсортированные опилки. Сушку опилок осуществим на центрифуге Ц25.

Соотношение опилок различных фракций определяем взвешиванием. Высота кучи измерялась рулеткой, диаметр кучи измерялся при помощи рулетки в трех точках, затем по формуле (2) находился угол естественного откоса и сравнивался со среднеарифметическим углом естественного откоса, измеренным в трех точках при помощи угломера (рис. 5).

Температура опилок и поверхности рабочего стола измерялась инфракрасным пирометром Venetech GM 320 и в момент проведения опытов составила  $20 \pm 2$  °С.

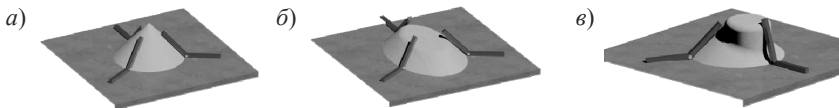


Рис. 5. Трехмерная модель измерения:

а) в случае формирования кучи в виде конуса; б) в случае формирования овальной в плане кучи; в) в случае формирования кучи с зависшей стенкой сыпучего материала

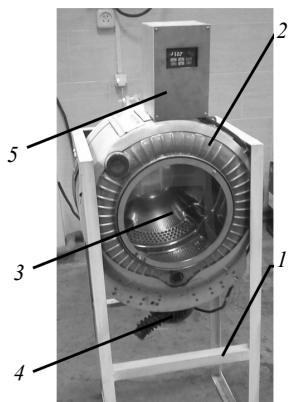


Рис. 6. Устройство для определения угла естественного откоса методом вращающегося барабана

1 – рама; 2 – корпус барабана;  
3 – барабан; 4 – электродвигатель;  
5 – частотный преобразователь

Для определения угла естественного откоса методом вращающегося барабана нами изготовлено устройство (рис. 6), позволяющее регулировать частоту тока, а значит, и скорость вращения барабана.

*Результаты исследования.* Для дубовых опилок максимальная относительная погрешность составила 15 % для расчетного способа и 10 % для угломерного способа соответственно. Средняя относительная погрешность измерений равна 6 % как для расчетного, так и для угломерного способов; абсолютная разница значений между углом естественного откоса, полученным расчетным и угломерным методами, составила 3 град.

Для сосновых опилок максимальная относительная погрешность составила 19 % для расчетного способа и 22 % для угломерного способа соответственно. Средняя относительная погрешность измерений равна 9 % для расчетного способа и 10 % для угломерного; абсолютная разница значений между углом естественного откоса, полученным расчетным и угломерным методами составила 2,1 град.

Минимальная относительная погрешность для сосновых и дубовых опилок составила 2–3 %.

Представим полученные результаты (см. табл. 2) в виде систем линейных уравнений с пятью неизвестными вида

$$y = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 + c.$$

Решим данные системы уравнений матричным методом с помощью MS Excel. Из линейной алгебры известно, что решением системы из  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными является уравнение вида

$$X = A^{-1}B. \quad (3)$$

Решением системы из  $m$  уравнений с  $n$  неизвестными при  $m > n$  является уравнение вида

$$X = (A^T A)^{-1} A^T B. \quad (4)$$

Таблица 2

**Результаты опытов по определению угла естественного откоса  
методом полого цилиндра**

Номер	Фракционный состав, мм (%)	H, мм	D, мм	$\alpha_0$ расч., град	$\alpha_0$ угломер, град
<b>Дуб</b>					
1	0,5 – 100 %	61,2	173	35,2	37,5
2	1,0 – 100 %	73,0	172	40,3	44,7
3	2,0 – 100 %	78,2	179	41,2	45,1
4	Смесь 0,5 : 2,0 (50 : 50)	71,5	166	40,7	43,0
5	Смесь 0,5 : 1,0 (50 : 50)	65,5	168	38,0	39,6
6	Смесь 1,0 : 2,0 (50 : 50)	84,8	170	44,9	43,6
7	Смесь 0,5 : 1,0 (75 : 25)	68	171	38,5	38,9
8	Смесь 0,5 : 2,0 (75 : 25)	74,2	166	41,8	40,1
9	Смесь 1,0 : 2,0 (75 : 25)	81,1	171	43,5	41,4
10	Смесь 0,5 : 1,0 (25 : 75)	56,1	168	33,7	39,3
11	Смесь 0,5 : 2,0 (25 : 75)	85,1	168	45,3	44,2
12	Смесь 1,0 : 2,0 (25 : 75)	84,6	173	44,4	42,9
<b>Сосна</b>					
1	0,5 – 100 %	81,0	177	42,4	41,8
2	1,0 – 100 %	73,7	156	43,4	43,8
3	2,0 – 100 %	82,5	171	43,9	46,9
4	5,0 – 100 %	83,0	182	42,3	43,9
5	смесь 0,5 : 1,0 (50 : 50)	73,8	167	41,4	42,6
6	смесь 0,5 : 2,0 (50 : 50)	73,2	174	40,0	37,9
7	смесь 0,5 : 5,0 (50 : 50)	86,7	179	44,1	44,4
8	смесь 1,0 : 2,0 (50 : 50)	81,3	160	45,6	46,8
9	смесь 1,0 : 5,0 (50 : 50)	96,8	165	49,6	48,8
10	смесь 2,0 : 5,0 (50 : 50)	82,5	186	41,5	42,3
11	смесь 0,5 : 1,0 (75 : 25)	76,6	167	42,5	41,7
12	смесь 0,5 : 2,0 (75 : 25)	74,2	171	40,9	41,6
13	смесь 0,5 : 5,0 (75 : 25)	65,8	176	36,8	36,6
14	смесь 0,5 : 1,0 (25 : 75)	70,7	160	41,4	42,8
15	смесь 1,0 : 2,0 (75 : 25)	71,4	158	42,1	44,4
16	смесь 1,0 : 5,0 (75 : 25)	77,5	162	43,8	43,1
17	смесь 0,5 : 2,0 (25 : 75)	81,7	166	44,6	43,5
18	смесь 1,0 : 2,0 (25 : 75)	75,6	168	42,0	40,7
19	смесь 2,0 : 5,0 (75 : 25)	87	169	45,8	43,5
20	смесь 0,5 : 5,0 (25 : 75)	69,7	187	36,7	38,3
21	смесь 1,0 : 5,0 (25 : 75)	84,9	176	44,0	45,2
22	смесь 2,0 : 5,0 (25 : 75)	78	180	40,9	40,7

Таблица 3

**Результаты измерения углов естественного откоса при различной частоте тока двигателя барабана**

Фракция	Угол естественного откоса $\alpha_0$ , град, при частоте, Гц														
	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0
0,5	0	44	46	52	55	57	59	59	61	61	65	65	67	67	70
1,0	0	0	47	47	53	56	58	58	60	60	61	61	62	62	65
2,0	0	0	46	46	48	51	53	53	57	57	57	57	59	60	62
5,0	0	50	50	50	50	55	55	55	55	55	55	55	57	57	65

В таком случае решение сведется к операциям транспонирования, вычислению обратных матриц и умножению матриц. Таким образом, мы получим значения угла естественного откоса, характерные для  $i$ -й фракции в смеси опилок.

Выведем уравнение угла естественного откоса на основе формулы (1) и результатов опытов:

$$\alpha_0 = \sum (k_i \cdot x_i) k_i k_{пов} k_{см} k_{вл}, \quad (5)$$

где  $k_i$  – процент содержания  $i$ -й фракции в смеси, %;  $x_i$  – угол естественного откоса, характерный для  $i$ -й фракции в смеси, град (для 0,5 мм  $x_i = 38,7$ , для 1 мм  $x_i = 43,6$ , для 2 мм  $x_i = 44,4$ , для 5 мм  $x_i = 42,9$ );  $k_i$  – температурный коэффициент, при температуре поверхности  $18 \pm 2$  °С  $k_i = 1$ ;  $k_{пов}$  – коэффициент состояния опорной поверхности, для неподвижной поверхности  $k_{пов} = 1$ ;  $k_{см}$  – породный коэффициент, зависит от содержания смолы в древесине, для дуба  $k_{см} = 1$ , для сосны  $k_{см} = 1,03$ ;  $k_{вл}$  – коэффициент влажности, зависит от влажности сыпучего материала, при  $W_{абс} = 20$  %  $k_{вл} = 1$ .

Представим результаты опытов из табл. 3 в виде графика (рис. 7) и, воспользовавшись функцией MS Excel «Добавление тренда», представим линейные тренды (рис. 8). Для расчета точек методом наименьших квадратов прямая линия тренда использует следующее уравнение:

$$y = mx + b, \quad (6)$$

где  $m$  – наклон;  $b$  – смещение.

Соответственно эмпирические уравнения, описывающие изменение угла естественного откоса от частоты тока (скорости вращения) барабана для каждой фракции, будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} 0,5 \text{ мм} & \quad y = 3,6132x + 34,754; \\ 1,0 \text{ мм} & \quad y = 2,6593x + 39,077; \\ 2,0 \text{ мм} & \quad y = 2,6374x + 35,846; \\ 5,0 \text{ мм} & \quad y = 1,6264x + 43,593. \end{aligned} \quad (7)$$



Упростим эти уравнения, найдем для получения универсального уравнения зависимости угла естественного откоса от скорости вращения барабана и возьмем средние значения как смещения, так и наклона:

$$y = 2,64x + 38,32. \quad (8)$$

Отметим, что расхождения с эмпирическими формулами (7) будут увеличиваться при увеличении частоты тока (скорости вращения).

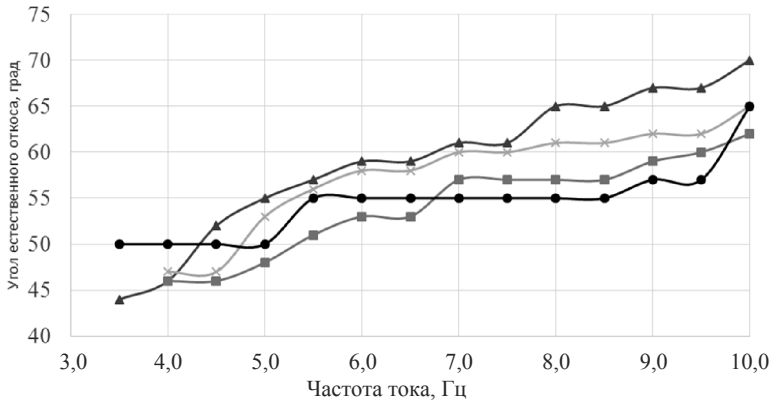


Рис. 7. График зависимости угла естественного откоса от частоты тока  
(▲) – 0.5; (×) – 1.0; (■) – 2.0; (●) – 5.0

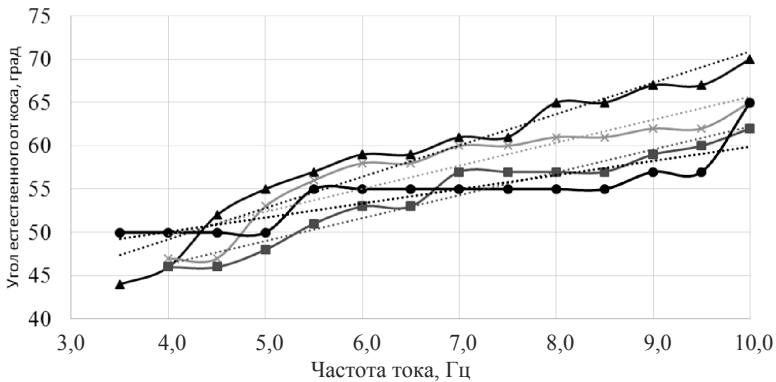


Рис. 8. График зависимости угла естественного откоса от частоты тока с наложенными трендами  
(▲) – 0,5; (×) – 1,0; (■) – 2,0; (●) – 5,0; (.....) – линейная (0,5);  
(.....) – линейная (1,0); (.....) – линейная (2,0); (.....) – линейная (5,0)

**Методы определения угла естественного откоса**

Метод	Диапазон $\alpha_0$ , град	Относительная ошибка
Полый цилиндр – при помощи угломера	15–78	10±5 %
Полый цилиндр – расчетный	22–61	10±5 %, но на 3 град больше угломерного способа
Вращающийся барабан	44–70	5 %

*Выводы.* В результате определения зависимости угла естественного откоса сыпучих материалов (опилок) от различных факторов получено уравнение (5) для расчета угла естественного откоса на основании параметров сыпучего материала; выявлена точность различных методов определения угла естественного откоса.

**Библиографический список**

*Mazarsky S.M.* Силосные склады для древесной щепы. М., 1971.  
 Union Iron : сайт компании. URL: [http://www.unionironworks.com/engineering\\_calculator\\_detail.aspx](http://www.unionironworks.com/engineering_calculator_detail.aspx) (Загл. с экрана)  
*Walter R. Niessen* Combustion and Incineration Processes: Application in Environmental Engineering. Taylor and Francis Group. 2010. 800 p.  
*Mi-Rong Wu.* Analysing Terminal Facilities for Biomass Operations // Dry Bulk and Specialist cargo Handling. Edition 60: November 2013, pp. 52–54.  
 Технология целлюлозно-бумажного производства: справочные материалы / под ред. П.С. Осипова. В 3 т. Т. 1. Кн. 1. Сырье и производство полуфабрикатов. СПб.: ЛТА, 2002. 420 с.

**Bibliography**

*Mazarsky S.M.* Silo storage for wood chips. Moscow, 1971 (Rus).  
 URL: [http://www.unionironworks.com/engineering\\_calculator\\_detail.aspx](http://www.unionironworks.com/engineering_calculator_detail.aspx)  
*Walter R. Niessen.* Combustion and Incineration Processes: Application in Environmental Engineering. Taylor and Francis Group. 2010. 800 p.  
*Mi-Rong Wu.* Analysing Terminal Facilities for Biomass Operations. *Dry Bulk and Specialist cargo Handling*. Edition 60: November 2013, pp. 52–54.  
 Technology of pulp and paper production handbook. Ed. P.S. Osipov. Vol. 1. B. 1. Raw materials and semi-finished production. St. Petersburg, FTA, 2002. 420 p. (Rus).

**Бачеригов И.В., Локштанов Б.М.** Определение угла естественного откоса сыпучих материалов // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2016. Вып. 214. С. 167–177.

Представлены сведения, посвященные методам нахождения угла естественного откоса сыпучих материалов. Рассматриваются методы и устройства для определения динамического угла естественного откоса. Анализируются данные различных исследований углов естественного откоса измельченных древесных материалов. Приводятся результаты экспериментов по определению угла естественного откоса для сосновых и дубовых опилок, сравниваются методы определения угла естественного откоса.

**Ключевые слова:** угол естественного откоса, сыпучие материалы, бункер и силос, опилки, щепа.

**Bacherikov I.V., Lokshtanov B.M.** Determination of the angle of repose of the bulk materials. *Izvestia Sankt-Peterburgskoj Lesotehneskoj Akademii*, 2016, is. 214, pp. 167–177 (in Russian with English summary).

The article presents information on methods of finding the angle of repose of the bulk material. Methods and apparatus for determining the dynamic angle of repose are reviewed. Data by various authors about the angles of repose of chopped wood materials is analyzed. The results of experiments on determination of angle of repose for the pine and oak sawdust and comparison of the methods for determining the angle of repose are shown.

**Key words:** angle of repose, bulk materials, bins and silos, wood chips.

---

**БАЧЕРИКОВ Иван Викторович** – аспирант кафедры технологии лесозаготовительных производств Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета

194021, Институтский пер., д. 5, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: ivashka512@gmail.com

**BACHERIKOV Ivan V.** – the post-graduate student of Forest Engineering Department, St. Petersburg State Forest University.

194021. Institute per. 5. St. Petersburg. Russia. E-mail: ivashka512@gmail.com

**ЛОКШТАНОВ Борис Моисеевич** – доцент кафедры технологии лесозаготовительных производств Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета, кандидат технических наук.

194021, Институтский пер., д. 5, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: blokshtanov@mail.ru

**LOKSHTANOV Boris M.** – PhD (Engineering), Associate Professor of Forest Engineering Department, St. Petersburg State Forest University.

194021. Institute per. 5. St. Petersburg. Russia. E-mail: blokshtanov@mail.ru