Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет имени С.М.Кирова»

факультет среднего профессионального образования

«Колледж автоматизации лесопромышленного производства»

МАТЕМАТИКА

Методическое пособие по выполнению домашней контрольной работы по дисциплине «Математика» для студентов заочной формы обучения, обучающихся по специальности

350204 «Технология комплексной переработки древесины».

2019

Рассмотрено и рекомендовано к изданию
Методическим советом
факультета среднего профессионального образования
«Колледж автоматизации лесопромышленного производства»
«Санкт-Петербургского государственного лесотехнического
университета имени С.М.Кирова»

____

Составитель:
Преподаватель первой категории
К.В. Слюсаренко

Рецензент:
Преподаватель математики высшей категории, почетный работник
среднего профессионального образования РФ
Л.А. Алексеева

Математика: Методическое пособие по выполнению домашней контрольной работы по дисциплине «Математика» для студентов заочной формы обучения, обучающихся по специальности 350204 «Технология комплексной переработки древесины»/ сост.: К.В. Слюсаренко, – СПб.; СПбГЛТУ, 2019. – 62 с.

Настоящее методическое пособие предназначено для студентов I курса факультета СПО «Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета имени С.М.Кирова» заочной формы обучения, обучающихся по специальности 350204 «Технология комплексной переработки древесины». Содержит программу курса, список рекомендуемой литературы, краткие теоретические сведения по разделам математики, решения типовых примеров, задания для выполнения контрольных работ.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебная дисциплина «Математика» является частью программы подготовки специалистов среднего звена (далее ППССЗ) в соответствии с ФГОС3+ по специальности СПО 35.02.04 «Технология комплексной переработки древесины» направления 350200 «Технология лесозаготовительных и деревообрабатывающих производств» укрупненной группы специальностей 350000 «Сельское, лесное и рыбное хозяйство».

В результате освоения дисциплины обучающийся должен уметь:

- составлять уравнения прямых по заданным условиям и изображать их на координатной плоскости;
- вычислять пределы функций с помощью раскрывания неопределенностей и формул первого и второго замечательных пределов;
- находить производные и дифференциалы сложных функций, исследовать функции и строить графики с помощью производных;
- находить неопределенные и определенные интегралы основными методами, применять геометрические и физические приложения определенного интеграла;
- решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, линейные и однородные дифференциальные уравнения;
- вычислять вероятности случайных событий, числовые характеристики дискретной случайной величины;
- задавать выборочное распределение, вычислять выборочные характеристики.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен знать:

- виды уравнений прямой на плоскости, условие параллельности и перпендикулярности кривых;

— определение предела функции в точке и на бесконечности, теоремы о пределах, формулы двух замечательных пределов, методы раскрытие неопределенностей;
— определение производной и дифференциала, правила дифференцирования, общую схему построения графиков с помощью производной;
— определение и свойства неопределенного и определенного интегралов, способы вычисления интегралов, формулы применения определенного интеграла при вычислении площадей плоских фигур, объемов тел вращения;
— определение и способы решения дифференциальных уравнений первого порядка;
— определение вероятности случайного события, основные формулы теории вероятности, числовые характеристики дискретной случайной величины;
— понятие выборки, выборочного распределения выборочных характеристик.

Пособие предназначено для оказания помощи студентам заочного отделения при выполнении домашней контрольной работы по математике. Пособие может быть использовано студентами дневной очной формы обучения.

Методическое пособие содержит программу курса, список рекомендуемой литературы, краткие теоретические сведения по разделам математики, решения типовых примеров, задания для выполнения контрольных работ.

ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИКА»

Раздел 1. Элементы аналитической геометрии.

1. Прямая на плоскости. Уравнения прямой.
2. Кривые второго порядка: эллипс, парабола, гипербола.

Раздел 2. Теория пределов. Непрерывность.

3. Предел функции: определение, свойства. Непрерывность функции. Предел слева и справа. Предел функции на бесконечности.
4. Замечательные пределы. Методы раскрытия неопределенностей: 0/0, ∞/∞, $\infty - \infty$, 1^∞.

Раздел 3. Основы математического анализа.

5. Производная и дифференциал. Определение, формулы дифференцирования элементарных функций.
6. Правила вычисления производной. Производная сложной функции.
7. Геометрический и механический смысл производной
8. Исследование функций с помощью первой производной. Необходимое и достаточное условие экстремума. Минимумы, максимумы, промежутки возрастания и убывания.
9. Исследование функций с помощью второй производной. Точки перегиба, промежутки выпуклости/вогнутости. Построение графика.
10. Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства Таблица основных интегралов.
11. Основные методы интегрирования. Замена переменных. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных и иррациональных функций.
12. Определенный интеграл и его свойства. Основная формула интегрального исчисления. Интегрирование заменой переменной и по частям.
13. Приложение определенного интеграла в геометрии.

Раздел 4. Основы дифференциальных уравнений.

14. Определение дифференциальных уравнений. Общее и частное решение.
15. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
16. Линейные дифференциальные уравнения.
17. Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка.

Раздел 5. Основы теории вероятностей и математической статистики.

18. Понятие вероятности. Виды случайных событий. Комбинаторика: перестановки, размещения, сочетания.
19. Некоторые теоремы теории вероятностей. Условная вероятность.
20. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
21. Формула Бернулли. Формула Пуассона.
22. Функция распределения случайной величины. Понятие ДСВ.
23. Числовые характеристики ДСВ: мода, медиана, математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение.
24. Задачи и методы математической статистики. Виды выборки.
25. Графическое представление эмпирических данных. Полигон и гистограмма. Эмпирическая функция распределения.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.

Контрольная работа имеет 6 вариантов. Вариант контрольной работы выбирается по номеру фамилии в списке группы.

Работы, выполненные не по своему варианту, не засчитываются и возвращаются студенту без оценки.

Студент должен ознакомиться с рецензией преподавателя, исправить все ошибки, допущенные в работе, а в случае неудовлетворительного выполнения работы исправить её и представить вторично или по указанию преподавателя выполнить другой вариант и представить его на рецензию.

При выполнении контрольной работы надо помнить следующие правила:

- каждая работа выполняется в отдельной ученической тетради. Для рецензии необходимо оставить одну свободную от текста страницу в конце тетради;
- на первом листе тетради указывается: полное наименование учебного заведения, предмет, номер варианта, фамилия, имя, отчество, номер группы и курса;
- контрольные работы, выполненные в рукописном варианте, должны быть написаны аккуратно и разборчиво;
- в конце работы проставляется дата её выполнения;
- контрольная должна быть представлена в учебное заведение в сроки, установленные графиком учебного процесса.

Замечания рецензента стирать и исправлять нельзя, все проверенные контрольные работы сохраняются до выставления оценки в зачетную книжку.

Таблица для определения варианта домашней контрольной работы.

Номер фамилии в списке группы	Номер варианта
1, 7, 13, 19, 25	1.
2, 8, 14, 20	2.
3, 9, 15, 21	3.

4, 10, 16, 22	4.
5, 11, 17, 23	5.
6, 12, 18, 24	6.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Раздел 1. Элементы аналитической геометрии.

Указания к заданию 1.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$Ax + By + C = 0,$

причем постоянные A, B не равны нулю одновременно. Это уравнение первого порядка называют *общим уравнением прямой*.

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть на плоскости заданы две точки M1(x_1, y_1) и M2(x_2, y_2), тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, то прямая параллельна одной из осей координат. Следует приравнять нулю соответствующий числитель.

Пример .

Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2; 3)$ и $M_2(3; -1)$.

Решение.

Воспользуемся формулой уравнения прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-3}{-1-3};\ \frac{y-3}{-4}=\frac{x-2}{1}.$$

По свойству пропорции имеем

$$y-3=-4(x-2); y-3=-4x+8.$$

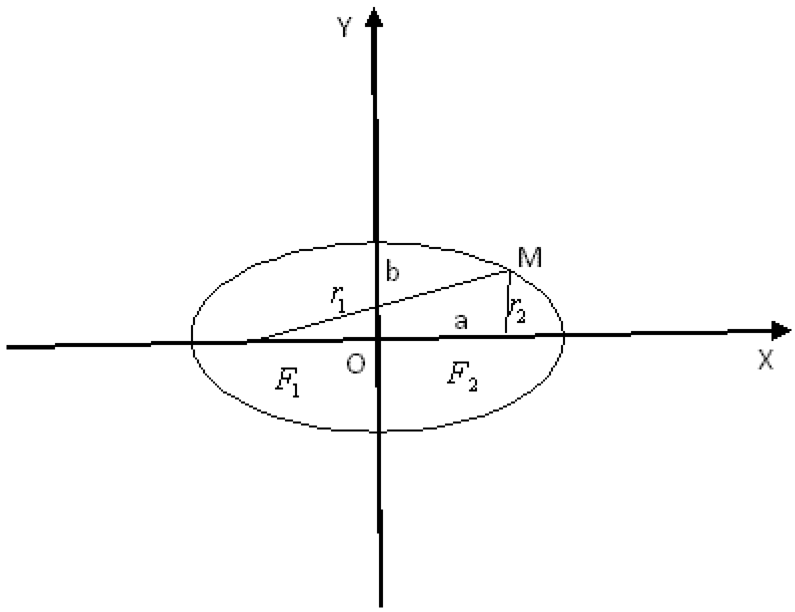
Приведем данное уравнение к виду общего уравнения прямой

$$y+4x-11=0.$$

Указания к заданию 2.

Эллипс - это геометрическая фигура, которая ограничена кривой, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Фокусами называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.



F_1, F_2 – фокусы . $F_1(c\ ;\ 0)$; $F_2(-\ c\ ;\ 0)$

c – половина расстояния между фокусами;

a – большая полуось;

b – малая полуось.

$c^2 = a^2 - b^2$

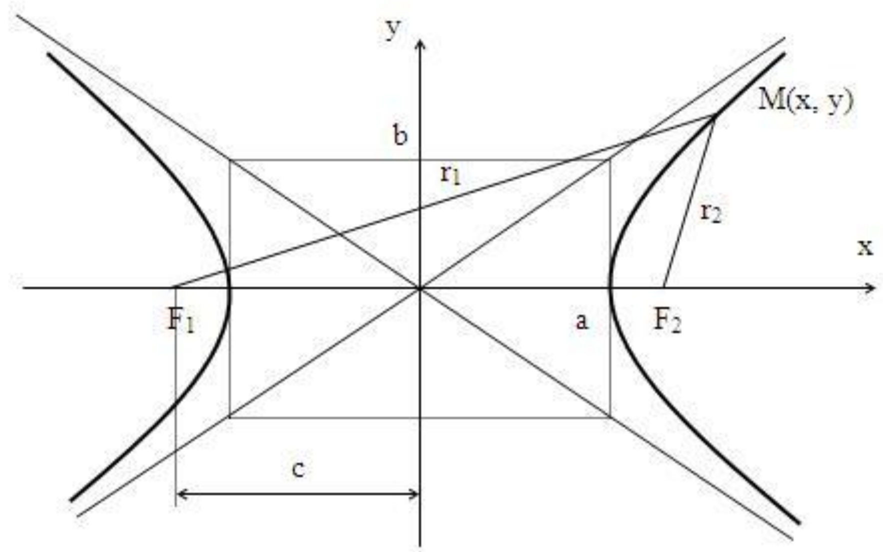
Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется *эксцентриситетом*.

$e = c/\ a$, $e < 1$.

Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых *фокусами* есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



По определению $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 2a$. $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ – фокусы гиперболы. $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2 = 2c$.

Ось 2a называется действительной осью.

Ось 2 b называется мнимой осью.

$c^2 = a^2 + b^2$

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm\frac{b}{a}x.$

Отношение $e = \frac{c}{a} > 1$ называется *эксцентриситетом* гиперболы, где c – половина расстояния между фокусами, a – действительная полуось.

Пример 1.

Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

Решение.

Найдем координаты фокусов эллипса:

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; $c = 3$; $F_1(3; 0)$, $F_2(-3; 0)$.

Длины осей: большая ось вычисляется исходя из значения параметра a=5, 2a = 10, малая ось вычисляется исходя из параметра b=4, 2b=8.

Вычислим эксцентриситет: e = 3/5.

Пример 2.

Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

Решение.

Найдем координаты фокусов гиперболы:

$c^2 = a^2 + b^2 = 25+16 = 41$, $c = \sqrt{41}$; $F_1(\sqrt{41}; 0)$, $F_2(-\sqrt{41}; 0)$.

Длины осей: большая ось вычисляется исходя из значения параметра a=5, 2a = 10, малая ось вычисляется исходя из параметра b=4, 2b=8.

Вычислим эксцентриситет: $e = \sqrt{41}/5$.

Уравнения асимптот примут вид $y = \pm\frac{4}{5}x$.

Раздел 2. Теория пределов. Непрерывность.

Указания к заданиям 3,4.

Краткие теоретические сведения

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ означает следующее: предел функции f(x) при стремлении x к x_0 равен A. Значения A и x_0 могут быть как конечными, так и бесконечными.

Основные свойства пределов.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B,$ причем A и B конечны, то

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B;$
- $\lim\limits_{x \to x_0} cf(x) = cA \quad \text{при} \quad c = \text{const};$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = AB;$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad \text{при} \quad B \neq 0.$

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0,$ то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при стремлении x к x_0.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty,$ то функция f(x) называется бесконечно большой при стремлении x к x_0.

Функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой и наоборот, т.е.

если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0,$ то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{\alpha(x)} = \infty,$

если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty,$ то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0.$

Вычисление предела отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших функций называется раскрытием неопределенности. Основным методом раскрытия неопределенностей является сокращение множителя, вызывающего неопределенность.

В курсе математического анализа, доказывается, что:

$\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ - первый замечательный передел,

$\lim\limits_{\alpha \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$ - второй замечательный предел.

В качестве параметра α может выступать не только переменная *x*, но и сложная функция. Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности.

<u>Пример 1</u>

Вычислить указанные пределы.

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2 - x - 1}{4x^2 - 5x + 1}$ при а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = \infty$.

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x-1}}{x - 2}.$

Решение

1а) Найти $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2-x-1}{4x^2-5x+1}$.

Найдем предел знаменателя:

$$\lim_{x\to -2}(4x^2-5x+1)=4\cdot(-2)^2-5\cdot(-2)+1=27\neq 0.$$

Следовательно, предел отношения равен отношению пределов.

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-x-1}{4x^2-5x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(2x^2-x-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(4x^2-5x+1)}=\frac{2\cdot(-2)^2-(-2)-1}{27}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}.$$

1б) Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{4x^2-5x+1}$.

Найдем предел знаменателя:

$$\lim_{x\to 1}(4x^2-5x+1)=4\cdot 1^2-5\cdot 1+1=0.$$

$\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-x-1)=0,$ т.е. предел числителя также равен 0.

Для раскрытия неопределенности разложим числитель и знаменатель на множители, используя формулу

$ax^2 + bx + c = a(x - x1)(x - x2)$, где

$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ – корни квадратного уравнения

$ax^2 + bx + c = 0$, $D = b2 - 4ac$ – дискриминант.

Решим уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$.

$D = (-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 9$, $\sqrt{D}=\sqrt{9}=3.$

$$x_1=\frac{1-3}{2\cdot 2}=-\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{1+3}{2\cdot 2}=1.$$

Таким образом,

$$2x^2 - x - 1 = 2(x - (-\frac{1}{2}))(x - 1) = 2(x + \frac{1}{2})(x - 1) = (2x + 1)(x - 1).$$

Решая точно так же, найдем корни уравнения $4x^2 - 5x + 1 = 0$.

Получим $x_1 = \frac{1}{4}; \quad x_2 = 1.$ Тогда

$$4x^2 - 5x + 1 = 4(x - \frac{1}{4})(x - 1) = (4x - 1)(x - 1).$$

Разложения числителя и знаменателя на множители имеют общий множитель $(x - 1)$, который можно сократить.

Получим

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{4x^2 - 5x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x + 1)(x - 1)}{(4x - 1)(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x + 1}{4x - 1} = \frac{3}{3} = 1.$$

1в) Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x - 1}{4x^2 - 5x + 1}$.

При стремлении x к ∞ числитель и знаменатель дроби стремятся к ∞. Для вычисления предела разделим числитель и знаменатель дроби на x^2 (старшую степень дроби), дробь при этом не изменится.

Получим

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x - 1}{4x^2 - 5x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2 - x - 1}{x^2}}{\frac{4x^2 - 5x + 1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{4 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

т.к. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$

2) Найти $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3x - 1}}{x - 2}$.

Найдем пределы знаменателя и числителя:

$$\lim_{x \to 2} (x - 2) = 0,$$

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+3}-\sqrt{3x-1})=\sqrt{5}-\sqrt{5}=0,$$

т.е. следует раскрыть неопределенность.

Для раскрытия неопределенности избавимся в числителе от иррациональности. Для этого домножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-1},$ сопряженное числителю.

Используя формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x-1}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{3x-1})(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-1})}{(x-2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-1})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{3x-1})^2}{(x-2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-1})}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)-(3x-1)}{(x-2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-1})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+3-3x+1}{(x-2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-1})}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-1})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-1}}=-\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Пример 2

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}$

Решение

Подставляем ноль в выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность $\frac{0}{0}$, которую нужно раскрывать. Если в пределе есть тангенс, то почти всегда его превращают в синус и косинус по известной тригонометрической формуле $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

В данном случае:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot\cos 2x}$$

Косинус нуля равен единице, и от него легко избавиться (не забываем пометить, что он стремится к единице):

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2}$$

Таким образом, если в пределе косинус является множителем, то его нужно превратить в единицу, которая исчезает в произведении.

Далее:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}=\infty$$

Пример 3

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$

Решение

Пробуем подставить бесконечно большое число в выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$$

В результате получена неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Преобразуем основание степени:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

Теперь можно почленно разделить числитель на знаменатель:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}$$

Таким образом, основание приняло вид $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$, и, более того, появилась нужная нам неопределенность 1^{∞}. Организуем второй замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$.

Заметим, что в данном примере $\alpha=\frac{x+1}{-3}$. Возведем основание степени в $\frac{x+1}{-3}$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в обратную дробь $\frac{-3}{x+1}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=$$

$$=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x+1}{x}}}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}^{\to 0}}{1+\frac{1}{x}^{\to 0}}}=e^{-3\cdot 2}=e^{-6}$$

Указания к заданию 5.

Краткие теоретические сведения

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ – левосторонний предел функции при стремлении x к x_0 слева;

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ – правосторонний предел функции при стремлении x к x_0 справа.

Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0),$ то функция f(x) *непрерывна* в точке x_0. В противном случае x0 – *точка разрыва функции* f(x).

Если функция имеет разрыв в данной точке (то есть предел функции в данной точке отсутствует или не совпадает со значением функции в данной точке), то для числовых функций возникает два возможных варианта, связанных с существованием у числовых функций односторонних пределов:

- если оба односторонних предела существуют и конечны, то такую точку называют точкой разрыва первого рода. К *точкам разрыва первого рода* относят устранимые разрывы и скачки.
- если хотя бы один из односторонних пределов не существует или не является конечной величиной, то такую точку называют точкой разрыва второго рода. *К точкам разрыва второго рода* относят полюса и точки существенного разрыва.

График функции f(x), непрерывной на интервале (a;b), изображается сплошной, т.е. непрерывной, линией на этом интервале.

Если f(x) и g(x) – непрерывные функции, то

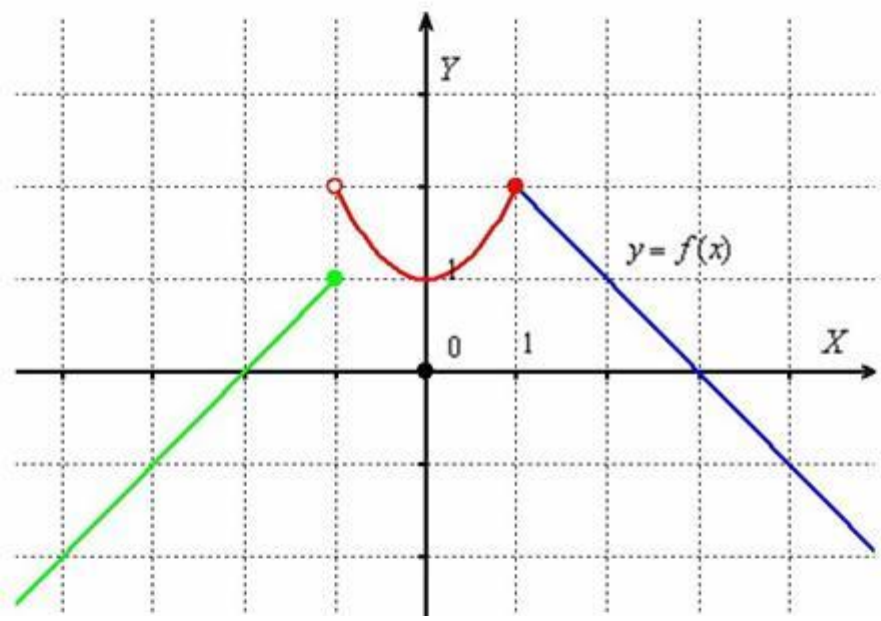
- $f(x) \pm g(x)$ и $f(x)\cdot g(x)$ непрерывны,
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ – непрерывная функция, кроме тех точек x_0, в которых $g(x_0) = 0$.

Пример

Исследовать функцию на непрерывность и построить график функции $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если} \quad x\le -1 \\ x^2+1, & \text{если} \quad -1<x\le 1 \\ -x+3, & \text{если} \quad x>1 \end{cases}$.

Решение:

Очевидно, что все три части функции непрерывны на соответствующих интервалах, поэтому осталось проверить только две точки «стыка» между кусками. Выполним чертёж.



I) Исследуем на непрерывность точку $x = -1$

1) $f(-1) = -1 + 2 = 1$ – функция определена в данной точке.

2) Найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} (x+2) = 1$$
$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} (x^2+1) = 1+1 = 2$$

Односторонние пределы конечны и различны, значит, функция $f(x)$ терпит разрыв 1-го рода со скачком в точке $x = -1$.

Вычислим скачок разрыва как разность правого и левого пределов:

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) - \lim_{x \to -1-0} f(x) = 2 - 1 = 1.$$

II) Исследуем на непрерывность точку $x = 1$

1) $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ – функция определена в данной точке.

2) Найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} (x^2+1) = 1+1 = 2$$
$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} (-x+3) = -1+3 = 2$$

$\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} f(x)$ – односторонние пределы конечны и равны, значит, существует общий предел.

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$ – предел функции в точке равен значению данной функции в данной точке.

Таким образом, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 1$ по определению непрерывности функции в точке.

Функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки $x = -1$, в которой она терпит разрыв первого рода со скачком.

Раздел 3. Основы математического анализа.

Указания к заданию 6.

Правила дифференцирования.

1) $(c)' = 0$;

2) $(x)' = 1$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(cu)' = c \cdot u'$

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$; $(v \neq 0)$

6) $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c}{v^2} \cdot v'$; $(v \neq 0)$

7) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

Дифференцирование сложных функций.

Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, т.е. $y = f(\varphi(x))$ - сложная функция, то $y'_x = f'(u) \cdot u'$.

Таблица производных основных элементарных функций.

1 $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ $(\alpha \in R)$,

2 $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$,

3 $(e^u)' = e^u \cdot u'$,

4 $(\log_a u)' \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$,

5 $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$,

8 $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$,

9 $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$,

10 $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$,

11 $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$,

12 $(arctg\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$,

6 $(\sin \boldsymbol{u})' = \cos \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}'$**,** **13** $(arcctg\, \boldsymbol{u})' = -\frac{1}{1+\boldsymbol{u}^2} \cdot \boldsymbol{u}'$**.**

7 $(\cos \boldsymbol{u})' = -\sin \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}'$**,**

Пример.

Найти производные функций:

а) $f(x) = 6x^4 - \frac{7}{2x\sqrt[3]{x^2}} + 11$ б) $f(x) = \frac{4+3\cos 5x}{1-2\sin 2x}$ в) $f(x) = \left(3e^{2x} - 7x\right) \cdot \mathrm{arctg} 5x$

г) $f(x) = \sqrt{\frac{\mathrm{tg}x}{x+2}}$ д) $f(x) = \left(2\sin\frac{x}{5} + x^3\right)^5$ е) $f(x) = \arcsin\left(\frac{3x}{2x+1}\right)$

Решение. При выполнении дифференцирования будем использовать свойства производных, таблицу производных, правило дифференцирования сложных функций.

а) $f'(x) = \left(6x^4 - \frac{7}{2}x^{-\frac{5}{3}} + 11\right)' = 6 \cdot 4x^3 - \frac{7}{2}\left(-\frac{5}{3}\right) \cdot x^{-\frac{8}{3}} + 0 = 24x^3 + \frac{35}{6 \cdot x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$;

б) $f'(x) = \frac{(4+3\cos 5x)' \cdot (1-2\sin 2x) - (4+3\cos 5x) \cdot (1-2\sin 2x)'}{(1-2\sin 2x)^2} =$

$= \frac{(-15\sin 5x) \cdot (1-2\sin 2x) - (4+3\cos 5x) \cdot (-4\cos 2x)}{(1-2\sin 2x)^2} =$

$= \frac{-15\sin 5x + 30\sin 5x \cdot \sin 2x + 16\cos 2x + 12\cos 5x \cdot \cos 2x}{(1-2\sin 2x)^2}$;

в) $f'(x) = \left(3 \cdot e^{2x} - 7x\right)' \cdot \mathrm{arctg} 5x + \left(3 \cdot e^{2x} - 7x\right) \cdot (\mathrm{arctg} 5x)' = \left(6e^{2x} - 7\right) \cdot \mathrm{arctg} 5x +$

$+ \left(3 \cdot e^{2x} - 7x\right) \cdot \frac{5}{1+25x^2}$;

г) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathrm{tg}x}{x+2}}} \cdot \left(\frac{\mathrm{tg}x}{x+2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{\mathrm{tg}x}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (x+2) - \mathrm{tg}x \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} =$

$= \frac{\sqrt{x+2} \cdot \left(x+2-\mathrm{tg}x \cdot \cos^2 x\right)}{2\cos^2 x \cdot \sqrt{\mathrm{tg}x} \cdot (x+2)^2}$;

д) $f'(x) = 5 \cdot \left(2\sin\frac{x}{5} + x^3\right)^4 \cdot \left(2\sin\frac{x}{5} + x^3\right)' = 5\left(2\sin\frac{x}{5} + x^3\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\cos\frac{x}{5} + 3x^2\right)$;

е) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{2x+1}\right)^2}} \cdot \left(\frac{3x}{2x+1}\right)' = \frac{(2x+1)}{\sqrt{4x^2+4x+1-9x^2}} \cdot \frac{3(2x+1) - 3x \cdot 2}{(2x+1)^2} =$

$= \frac{3}{(2x+1)\sqrt{4x+1-5x^2}}$;

Указания к заданию 7.

Касательная к графику функции f, дифференцируемой в точке x_o, - это прямая, проходящая через точку $(x_o; f(x_o))$ и имеющая угловой коэффициент $f\,'(x_o)$.

Угловой коэффициент равен тангенсу острого угла, образуемого прямой с положительным направлением оси абсцисс: $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_o:

$$y = f(x_o) + f\,'(x_o)\,(x - x_o)$$

Алгоритм решения уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$:

1. Вычислить $f(x_o)$.
2. Вычислить производные $f\,'(x)$ и $f\,'(x_o)$.
3. Внести найденные числа x_o, $f(x_o)$, $f\,'(x_o)$ в уравнение касательной.

<u>Пример.</u>

Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

<u>Решение.</u>

Следуем алгоритму.

1) Точка касания x_o равна 2. Вычислим $f(x_o)$:

$f(x_o) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$

2) Находим $f\,'(x)$. Для этого применяем формулы дифференцирования, изложенные в предыдущем разделе. Согласно этим формулам, $x^2 = 2x$, а $x^3 = 3x^2$. Значит:

$f\,'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 2x = 3x^2 - 4x$.

Теперь, используя полученное значение $f\,'(x)$, вычислим $f\,'(x_o)$:

$f\,'(x_o) = f\,'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 12 - 8 = 4$.

3) Итак, у нас есть все необходимые данные: $x_o = 2$, $f(x_o) = 1$, $f\,'(x_o) = 4$. Подставляем эти числа в уравнение касательной и, упрощая, находим окончательное решение:

$y = f(x_o) + f\,'(x_o)\,(x - x_o) = 1 + 4 \cdot (x - 2) = 1 + 4x - 8 = -7 + 4x = 4x - 7$.

<u>Ответ</u>: $y = 4x - 7$.

Указания к заданию 8.

Физический смысл первой и второй производной.

Производная $y'(x)$ *функции* $y=f(x)$ – *это мгновенная скорость изменения этой функции.* В частности, если зависимость между пройденным путём s и временем t при прямолинейном неравномерном движении выражается уравнением $s=f(t)$, то для нахождения мгновенной скорости точки в какой-нибудь определённый момент времени t нужно найти производную $s'=f'(t)$ и подставить в неё соответствующее значение t, то есть $v(t)=s'(t)$.

Вторая производная – это скорость изменения скорости, то есть ускорение, то есть $a(t)=v'(t)=s''(t)$.

Пример.

Точка движется прямолинейно по закону $s(t)=3t^2-3t+8\,(м)$. Найти скорость и ускорение точки в момент $t=4\ с$.

Решение.

Найдём скорость точки в любой момент времени t.

$v=s'=(3t^2-3t+8)'=6t-3$

Вычислим скорость в момент времени $t=4\ с$.

$v(4)=6\cdot 4-3=21\,(м/с)$

Найдём ускорение точки в любой момент времени t.

$a=v'=(6t-3)'=6$ и $a(4)=6\,(м/с^2)$, то есть ускорение в этом случае является величиной постоянной.

Указания к заданию 9.

Исследование функции с помощью первой производной.

С помощью производной функции можно определить характер монотонности функции, точки экстремума, а также ее наибольшее и наименьшее значение на заданном промежутке.

Достаточное условие возрастания (убывания) функции:

а) если на заданном промежутке $f'(x) > 0$, то функция возрастает на этом промежутке;

б) если $f'(x) < 0$, то функция убывает на этом промежутке.

Максимумом (минимумом) функции $y = f(x)$ называют такое ее значение, которое больше (меньше) всех ее других значений в окрестности рассматриваемой точки.

Максимум и минимум функции имеют локальный характер. Максимум и минимум функции называются *экстремумом функции*. Значение аргумента, при котором достигается экстремум, называется *точкой экстремума*.

Критическими точками функции называют те значения аргумента, при которых производная функции равна нулю или не существует. Критические точки функции находят, решая уравнение: $f'(x) = 0$.

Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «+» на «–», то имеем точку максимума, а если с «–» на «+», то имеем точку минимума.

Исследование функции с помощью второй производной.

Критическими точками второго рода функции $y = f(x)$ называют те значения аргумента, при которых вторая производная этой функции равна нулю или не существует.

Критические точки второго рода функции $y = f(x)$ находят, решая уравнение $f''(x) = 0$.

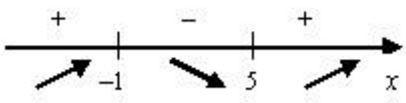
Если при переходе через критическую точку второго рода вторая производная функции меняет знак, то имеем *точку перегиба* графика функции.

Если на некотором промежутке выполняется неравенство $f''(x) > 0$, то функция $y = f(x)$ *вогнута* на этом промежутке, а если $f''(x) < 0$, то функция *выпукла* на этом промежутке.

Пример 1. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 1$.

Решение.

Используя таблицу производных, найдем производную функции: $y' = x^2 - 4x - 5$. Найдем критические точки: $x^2 - 4x - 5 = 0$,$x_1 = -1$, $x_2 = 5$. Нанесем числа -1 и 5 на координатную прямую и установим знаки производной на полученных промежутках:



Ответ: На промежутках $(-\infty; -1)$ и $(5; +\infty)$ функция возрастает. На промежутке $(-1; 5)$ функция убывает. Точки экстремума: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 5$.

Пример 2. Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости графика функции $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x - 23$.

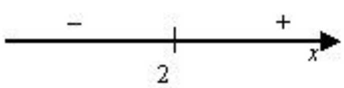
Решение.

1. Используя таблицу производных, найдем первую производную функции: $y' = x^2 - 4x - 5$.

2. Используя таблицу производных, найдем вторую производную функции: $y'' = 2x - 4$.

3. Найдем критические точки второго рода: $2x - 4 = 0$, $x = 2$.

4. Нанесем точку $x = 2$ на область определения данной функции и установим знаки ее второй производной на полученных промежутках:



Ответ: На промежутке $(-\infty; 2)$ функция выпукла вверх; на промежутке $(2; +\infty)$ функция выпукла вниз; $x = 2$ – точка перегиба графика функции.

Указания к заданию 10.

Первообразной функции *f(x)* на промежутке *(a; b)* называется такая функция *F(x)*, что выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ для любого *x* из заданного промежутка. Все множество первообразных функции *f(x)* называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Свойства неопределенного интеграла.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ производная результата интегрирования равна подынтегральной функции.

2. $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$ неопределенный интеграл дифференциала функции равен сумме самой функции и произвольной константы.

3. $\int \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$, где α – произвольная константа. Коэффициент можно выносить за знак неопределенного интеграла.

4. $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ неопределенный интеграл суммы/разности функций равен сумме/разности неопределенных интегралов функций.

Основные формулы интегрирования.

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм:
$\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$
14. «Длинный» логарифм:
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Метод интегрирования, при котором интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием*.

Пример 1.

Найти интеграл методом непосредственного интегрирования

$$\int \left(2x^2 + \frac{\cos x}{3} + 4^x - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$

Решение.

Воспользуемся свойствами интеграла и приведем данный интеграл к нескольким табличным.

$$\int \left(2x^2 + \frac{\cos x}{3} + 4^x - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx =$$

$$= \int 2x^2 dx + \int \frac{\cos x}{3} dx + \int 4^x dx - \int \frac{4dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 2\int x^2 dx + \frac{1}{3}\int \cos x dx + \frac{4^x}{\ln 4} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{1}{3} \cdot \sin x + \frac{4^x}{\ln 4} - 4 \cdot \arcsin x + C =$$

$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{\sin x}{3} + \frac{4^x}{\ln 4} - 4\arcsin x + C$$

Метод замены переменой (метод подстановки) заключается во введении новой переменной интегрирования (то есть подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся.

Пример 2.

Найти интеграл $\int xe^{x^2} dx$

Решение.

Сделаем замену переменной: $x^2 = t$, далее приведем интеграл к табличному виду и решим его. В конце решения делаем обратную замену.

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} \cdot xdx \left\| \begin{array}{l} x^2 = t \\ d\left(x^2\right) = dt \\ 2xdx = dt \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right\| = \int e^t \cdot \frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2} \cdot e^t + C = \frac{e^{x^2}}{2} + C$$

Ответ. $\int xe^{x^2}dx = \frac{e^{x^2}}{2} + C$

Интегрирование по частям — применение следующей формулы для интегрирования:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

<u>Пример 3.</u>

Найти неопределенный интеграл.

$\int x\cos 6x dx = (*)$

<u>Решение.</u>

Интегрируем по частям:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos 6x dx \Rightarrow v = \int \cos 6x dx = \frac{1}{6}\sin 6x$

$\int u dv = uv - \int v du$

$(*) = \frac{1}{6}x\sin 6x - \frac{1}{6}\int \sin 6x dx = \frac{1}{6}x\sin 6x - \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{6}\cos 6x\right) =$

$= \frac{1}{6}x\sin 6x + \frac{1}{36}\cos 6x + C$, где $C = const$

Указания к заданию 11.

Основная формула интегрального исчисления – формула Ньютона-Лейбница. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $y = f(x)$ и прямыми $x = a, x = b, y = 0;$ находится по формуле

$S = \int_a^b f(x)dx$, (1)

где $f(x) \geq 0$ и $x \in [a, b]$.

Если $f(x) \le 0, x \in [a,b]$, то определенный интеграл (1) неположителен. Его абсолютная величина равна площади криволинейной трапеции, расположенной ниже оси Ох, т.е. $S = -\int_a^b f(x)dx$.

Если же функция f(x) меняет на отрезке $[a,b]$ знак конечное число раз, то для вычисления площади фигуры можно разбить отрезок интегрирования на части, где f(x) не меняет знака, а затем найти по формуле (1) площади фигур, полученных таким образом и взять их алгебраическую сумму.

Пусть фигура заключена между двумя кривыми $y = f(x) и\ y = \phi(x),\ x \in [a,b]$ Пусть для определенности $f(x) > \phi(x),\ x \in [a,b]$. Тогда площадь S равна разности площадей криволинейных трапеций, ограниченных сверху соответственно графиками функций $y = f(x) и\ y = \phi(x),\ x \in [a,b]$, т.е.

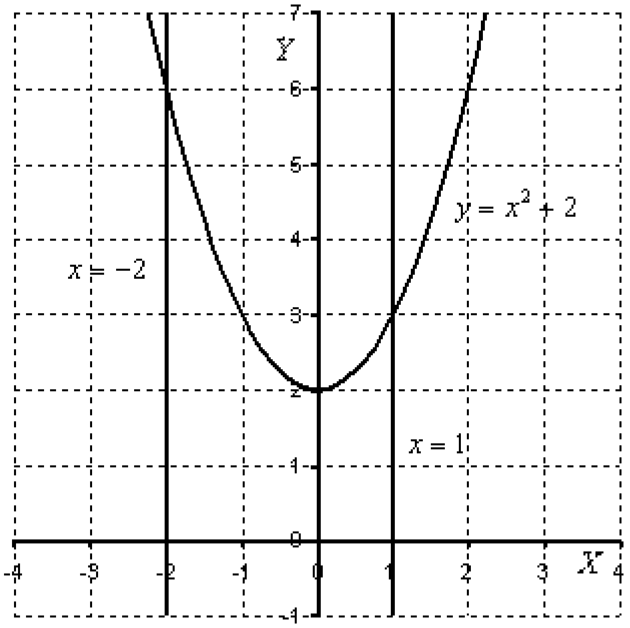
$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \phi(x)dx = \int_a^b |f(x) - \phi(x)|dx.$$

Пример.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

Решение.

Выполним чертеж



На отрезке $[-2;1]$ график функции $y = x^2 + 2$ расположен над осью OX, поэтому:

$$S = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9$$

Ответ: $S = 9$ $ед^2$

Раздел 4 Основы дифференциальных уравнений.

Указания к заданию 12.

Дифференциальное уравнение (ДУ) – это уравнение, в которое входит неизвестная функция под знаком производной или дифференциала.

Дифференциальное уравнение первого порядка $y'=f(x,y)$ называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если функцию $f(x,y)$ можно представить в виде произведения двух функций, зависящих только от x и y:

$$f(x,y) = p(x)h(y),$$

где $p(x)$ и $h(y)$ − непрерывные функции.

Рассматривая производную y' как отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}$, перенесем dx в правую часть и разделим уравнение на $h(y)$:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)h(y), \Rightarrow \quad \frac{dy}{h(y)} = p(x)dx.$$

Разумеется, нужно убедиться, что $h(y) \neq 0$. Если найдется число x_0, при котором $h(x_0) = 0$, то это число будет также являться решением дифференциального уравнения. Деление на $h(y)$ приводит к потере указанного решения.

Обозначив $q(y) = \frac{1}{h(y)}$, запишем уравнение в форме:

$$q(y)dy = p(x)dx.$$

Теперь переменные разделены и мы можем проинтегрировать дифференциальное уравнение:

$$\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx + C,$$

где C − постоянная интегрирования.

Вычисляя интегралы, получаем выражение

$$Q(y) = P(x) + C,$$

описывающее общее решение уравнения с разделяющимися переменными.

<u>Пример.</u>

Найти все решения дифференциального уравнения $y' = -xe^{y}$.

<u>Решение.</u>

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = -xe^{y},$$

$$\frac{dy}{e^{y}} = -xdx,$$

$$e^{-y}dy = -xdx.$$

Очевидно, что деление на e^y не приводит к потере решения, поскольку $e^y > 0$. После интегрирования получаем

$$\int e^{-y}dy = \int(-x)\,dx + C,$$

$$-e^{-y} = -\frac{x^2}{2} + C \quad \text{или} \quad e^{-y} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Данный ответ можно выразить в явном виде:

$$-y=\ln\left(\frac{x^2}{2}+C\right) \quad \text{или} \quad y=-\ln\left(\frac{x^2}{2}+C\right).$$

В последнем выражении предполагается, что константа $C>0$, чтобы удовлетворить области определения логарифмической функции.

Указания к заданию 13.

Если дифференциальное уравнение можно разрешить относительно второй производной y'', то его можно представить в следующем явном виде:

$$y''=f(x,y,y').$$

В частных случаях функция f в правой части может содержать лишь одну или две переменных. Такие *неполные уравнения* включают в себя 5 различных типов:

$$y''=f(x), \quad y''=f(y), \quad y''=f(y'), \quad y''=f(x,y'), \quad y''=f(y,y').$$

С помощью определенных подстановок эти уравнения можно преобразовать в уравнения первого порядка.

Рассмотрим уравнения первого типа.

Если дано уравнение $y''=f(x)$, то его порядок можно понизить введением новой функции $p(x)$, такой, что $y'=p(x)$. В результате мы получим дифференциальное уравнение первого порядка $p'=f(x)$.

Решая его, находим функцию $p(x)$. Затем решаем второе уравнение $y'=p(x)$ и получаем общее решение исходного уравнения.

Пример.

Решить уравнение $y''=\sin x+\cos x$.

Решение.

Введем функцию $y'=p(x)$. Тогда $y''=p'$. Следовательно,

$$p'=\sin x+\cos x.$$

Интегрируя, находим функцию $p(x)$:

$$\frac{dp}{dx}=\sin x+\cos x, \quad \Rightarrow dp=(\sin x+\cos x)dx, \quad \Rightarrow \int dp=\int(\sin x+\cos x)dx, \quad \Rightarrow p=-\cos x+\sin x+C_1.$$

Учитывая, что $y' = p(x)$, проинтегрируем еще одно уравнение 1-го порядка:

$$y'=-\cos x+\sin x+C_1, \quad \Rightarrow \int dy=\int(-\cos x+\sin x+C_1)dx, \quad \Rightarrow y=-\sin x-\cos x+C_1x+C_2.$$

Последняя формула представляет собой общее решение исходного дифференциального уравнения.

Раздел 5. Основы теории вероятностей и математической статистики.

Указания к заданию 14.

Под испытанием S будем понимать осуществление некоторого комплекса условий или действий, в результате которого происходит определенное явление, называемое *событием*.

Виды событий.

Случайные события – это такие события, которые могут произойти, а могут не произойти в результате испытания. Случайные события обозначаются буквами A, B, C и т.д.

Достоверное событие с необходимостью должно произойти в результате испытания и обозначается U .

Невозможное событие не может произойти в результате испытания и обозначается V .

Элементарные события – это неразложимые равновозможные исходы испытания, причем появление одного из элементарных событий исключает появление других.

Те элементарные события, при которых наступает событие A, называются *благоприятствующими* событию A.

Вероятность события A характеризует степень объективной возможности этого события и обозначается $P(A)$ (от латинского *probabilitas* - "вероятность").

Вероятность $P(A)$ события A равна отношению числа m элементарных исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу n элементарных исходов испытания, т.е.

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Это определение вероятности события называют *классическим*.

- *Суммой событий* A и B называется событие $A+B$, которому благоприятствуют все элементарные события, благоприятствующие хотя бы одному из событий A, B.

Другими словами, событие $A+B$ заключается в наступлении события A или события B, или обоих вместе.

- *Произведением событий* A и B называется событие AB, которому благоприятствуют элементарные события, благоприятствующие обоим событиям A и B.

Другими словами, событие AB заключается в совместном появлении обоих событий A и B.

- Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию A, если оно появляется, когда не появляется событие A, и наоборот.

- События A и B называются *несовместными*, если в одном и том же испытании появление одного из этих событий исключает появление другого. В противном случае события A и B называются *совместными*.

- $P_A(B)$ – *условная вероятность* появления события B, вычисленная при условии, что событие A произошло.

- События A и B называются *независимыми*, если вероятность появления одного из этих событий одна и та же независимо от того, произошло другое событие или нет, т.е. $P_A(B)=P_{\overline{A}}(B)$. В противном случае события A и B называются *зависимыми*.

Для зависимых событий имеет место неравенство $P_A(B)\neq P_{\overline{A}}(B)$.

- *Теорема сложения вероятностей.*

Если события A и B несовместны, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Если события A и B совместны, то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

- *Вероятность противоположного события*:

$P(\overline{A})=1-P(A)$.

- *Теорема умножения вероятностей*.

Если события A и B независимы, то $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Если события A и B зависимы, то $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$ или $P(AB)=P(B)\cdot P_B(A)$.

Пример 1.

Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: p1=0,8; p2=0,7; p3=0,9. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех орудий.

Решение.

Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2 и A_3 (т.е. вероятности промахов), соответственно равны:

$$q_1 = 1-p_1 = 1-0{,}8 = 0{,}2;$$
$$q_2 = 1-p_2 = 1-0{,}7 = 0{,}3;$$
$$q_3 = 1-p_3 = 1-0{,}9 = 0{,}1.$$

Искомая вероятность $P(A)=1-q_1q_2q_3 = 1-0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}1 = 0{,}994.$

Пример 2.

Из партии изделий товаровед наудачу отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что выбранная вещь окажется высшего сорта равна, 0,8; первого сорта – 0,7; второго сорта – 0,5. Найти вероятность того, что из трех наудачу отобранных изделий будут:

а) только два высшего сорта;

б) все разные.

Решение.

Пусть событие A_1 - изделие высшего сорта; событие A_2 - изделие первого сорта; событие A_3 - изделие второго сорта.

По условию задачи $P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}7$; $P(A_3) = 0{,}5$. События A_1, A_2, A_3 - независимы.

а) Событие *A* – только два изделия высшего сорта будет выглядеть так $A = A_1 A_1 A_2 + A_1 A_1 A_3$, тогда

$$P(A) = P(A_1 A_1 A_2 + A_1 A_1 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_1) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_1) \cdot P(A_3) =$$
$$= (0{,}8)^2 \cdot 0{,}7 + (0{,}8)^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}768.$$

б) Событие *B* – все три изделия различны - выразим так: $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, тогда $P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}28$.

Указания к заданию 15.

Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно.

Если множество возможных значений случайной величины конечно или образуют бесконечную числовую последовательность, то такая случайная величина называется *дискретной*.

Каждая случайная величина полностью определяется своей *функцией распределения*.

Если ξ.- случайная величина, то функция $F(x) = F_\xi(x) = P(\xi<x)$ называется *функцией распределения* случайной величины ξ. Здесь $P(\xi<x)$ - вероятность того, что случайная величина ξ принимает значение меньше *x*.

Если ξ - дискретная случайная величина, принимающая значения

$x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots$ с вероятностями $p_1 < p_2 < \ldots < p_i < \ldots$, то таблица вида

x_1	x_2	…	x_i	…
p_1	p_2	…	p_i	…

Называется *распределением дискретной случайной величины*.

Функция распределения случайной величины, с таким распределением, имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при\ x < x_1, \\ p_1, & при\ x_1 \le x < x_2, \\ p_1+p_2, & при\ x_2 \le x < x_3, \\ \ldots, & \\ p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}, & при\ x_{n-1} \le x < x_n, \\ 1, & при\ x \ge x_n. \end{cases}$$

У дискретной случайной величины функция распределения ступенчатая.

Числа, которые описывают случайную величину суммарно, называют *числовыми характеристиками случайной величины.*

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – возможные значения случайной величины X, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – соответствующие вероятности.

Замечание. Вышеприведенная формула справедлива для дискретной случайной величины, число возможных значений которой конечно. Если же случайная величина имеет счетное число возможных значений, то для нахождения математического ожидания используют формулу:

$$M(X)=\sum_{i}^{\infty} x_i p_i,$$

причем это математическое ожидание существует при выполнении соответствующего условия сходимости числового ряда в правой части равенства.

Дисперсией дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величиной от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\left([X - M(X)]^2\right).$$

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины.

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Размерность среднего квадратического отклонения совпадает с размерностью самой случайной величины.

Среднее квадратическое отклонение, следовательно, является, как и дисперсия, мерой рассеяния распределения, но измеряется, в отличие от дисперсии, в тех же единицах, которые используют для измерения значений случайной величины.

Модой дискретной случайной величины, обозначаемой *Mo*, называется ее наиболее вероятное значение

Медиана ДСВ – среднее по расположению в ряду распределения значение случайной величины. В случае четного числа значений за медиану принимают два центральных значения. Медиана обозначается Me.

Пример.

Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

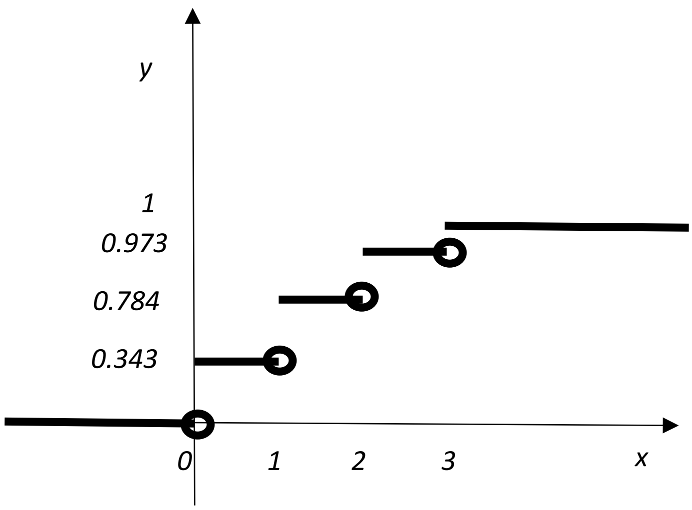
Построить график функции распределения, определить числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, моду и медиану.

Решение.

Составим функция распределения ДСВ.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<0;\\ 0{,}343, & \text{при } 0\le x<1;\\ 0{,}784, & \text{при } 1\le x<2;\\ 0{,}973, & \text{при } 2\le x<3;\\ 1, & \text{при } x\ge 3. \end{cases}$$

График функции распределения будет иметь вид:



Вычислим математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot p_i=0\cdot 0{,}343+1\cdot 0{,}441+2\cdot 0{,}189+3\cdot 0.027=0{,}9.$$

Для нахождения дисперсии $D(X)$ найдем математическое ожидание $M(X^2)$ случайной величины X^2 :

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2\cdot p_i=0\cdot 0{,}343+1^2\cdot 0{,}441+2^2\cdot 0{,}189+3^2\cdot 0.027=1{,}44.$$

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2=1{,}44-0{,}9^2=0{,}63.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}63}=0{,}79.$$

Найдем моду – наиболее вероятное значение случайной величины. Исходя из заданного ряда распределения, наиболее вероятное значение – x=1, которому соответствует значение вероятности 0,441. Таким образом, Mo=1.

Далее найдем моду. Случайная величина принимает четыре значение, соответственно в середине ряда распределения расположены значения x=1 и x=2. Me=1;2.

Указания к заданию 16.

Математическая статистика - раздел прикладной математики, непосредственно примыкающий к теории вероятностей. Основное отличие математической статистики от теории вероятностей состоит в том, что в математической статистике рассматриваются не действия над законами распределения и числовыми характеристиками случайных величин, а приближенные методы отыскания этих законов и числовых характеристик по результатам экспериментов.

Генеральная совокупность- большая статистическая совокупность, из которой отбирается часть объектов для исследования (например, все население области, студенты вузов данного города и т.д.)

Выборка (выборочная совокупность) - множество объектов, отобранных из генеральной совокупности.

Вариационный ряд - статистическое распределение, состоящее из вариант (значений случайной величины) и соответствующих им частот.

Генеральная совокупность X некоторого количественного признака однородных объектов изучается при помощи случайной выборки.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 встретилось n_1 раз, x_2 встретилось n_2 раз, …, x_k встретилось n_k раз. Наблюдаемые значения x_1, x_2, …, x_k называют вариантами;

n_1, n_2, …, n_k называют частотами.

Статистическое распределение выборки имеет вид таблицы, в верхней строке которой записаны все варианты в возрастающей последовательности, а в нижней – соответствующие частоты. В общем виде это выглядит так:

x_1	x_2	$\ldots$	x_k
n_1	n_2	$\ldots$	n_k

Сумма всех частот равна количеству всех вариант выборки, т.е. $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Число n называют *объемом выборки*.

Вместо частот можно рассматривать *относительные частоты* $w_i = \frac{n_i}{n}$. Относительные частоты имеют свойства вероятностей, а именно:

$0 \leq w_i \leq 1$.

Если относительная частота близка к 1, то соответствующая варианта встречается часто, если же относительная частота близка к 0, то соответствующая варианта встречается редко.

Для относительных частот выполняется равенство $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$.

Вместо вариант в статистическом распределении выборки можно задать последовательность интервалов, в которые попадают наблюдаемые значения признака. В качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот всех вариант, попавших в этот интервал. При статистическом анализе интервального распределения выборки все варианты, попавшие в один и тот же интервал, переименовываются. Всем им присваивается единое значение, равное середине интервала, что возможно в силу незначительного отличия вариант, попавших в один и тот же интервал.

Пусть Nx — число наблюдений, при которых значение признака X меньше x. При объеме выборки, равном N, относительная частота события X<x равна Nx/N.

Функция F*(x), определяющая для каждого значения X относительную частоту события X<x, называется Эмпирической функцией распределения, или функцией распределения выборки.

Для наглядности статистическое распределение выборки можно изобразить графически при помощи полигона или гистограммы.

Полигоном частот называют ломаную линию, соединяющую точки $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, …, $(x_k; n_k)$, при этом по оси абсцисс откладываются варианты x_1, x_2, …, x_k, а по оси ординат – соответствующие частоты n_1, n_2, …, n_k.

Полигоном относительных частот называют ломаную линию, соединяющую точки $(x_1; w_1)$, $(x_2; w_2)$, …, $(x_k; w_k)$.

Если статистическое распределение выборки задано при помощи последовательности интервалов, то целесообразно построить гистограмму частот или гистограмму относительных частот. Для этого по оси абсцисс откладываются интервалы, в которые попадают наблюдаемые значения признака и на этих интервалах как на основаниях строятся прямоугольники, высоты которых равны соответствующим частотам n_i или относительным частотам w_i. Совокупность прямоугольников образует ступенчатую фигуру, называемую *гистограммой.*

Пример 1.

Построить эмпирическую функцию по заданному распределению выборки:

x_i	2	4	6
n_i	10	15	25.

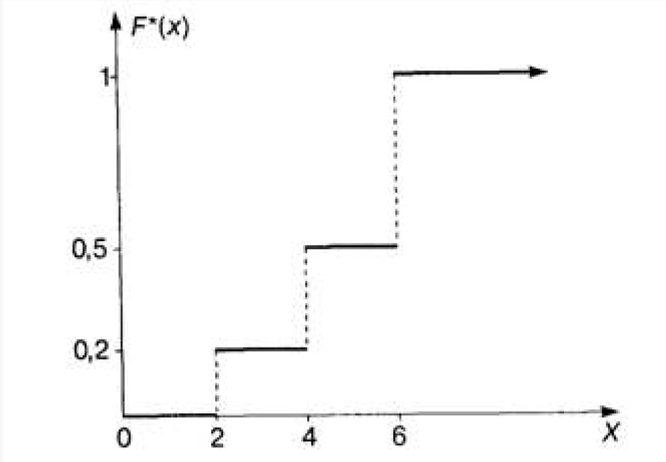
Решение.

Находим объем выборки: n = 10 + 15 + 25 = 50. Наименьшая варианта равна 2, поэтому F*(x) = 0 при x ≤ 2. Значение x < 4 (или x_1 = 2) наблюдалось 10 раз, значит, F*(x) = 10/50 = 0,2 при 2 < x < 4. Значения x < 6 (а именно x_1 = 2 и x_2 =

4) наблюдались 10 + 15 = 25 раз, значит, при 4 < x < 6 функция F*(x) = 25/50 = 0,5. Поскольку x = 6 — максимальная варианта, то F*(x) = 1 при x > 6. Напишем формулу искомой эмпирической функции:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 2; \\ 0{,}2, & 2 < x \leqslant 4; \\ 0{,}5, & 4 < x \leqslant 6; \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

График этой функции показан на рисунке.



Пример 2.

По данным выборки

x_i	2	3	4	5	6
n_i	5	8	9	5	3

где x_i - варианты, n_i - частоты вариант x_i, построить полигон частот, составить эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

Решение.

Сумма частот всех вариант должна быть равной объему выборки. В данном примере объем выборки равен: n=5 + 8 + 9 + 5 + 3=30.

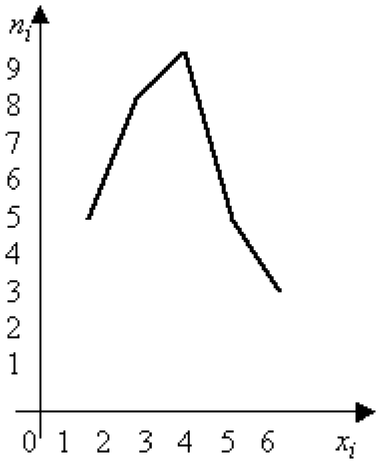
Найдем относительные частоты:

$$W_1 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};\ \ W_2 = \frac{8}{30} = \frac{4}{15};\ \ W_5 = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}.\ W_3 = \frac{9}{30} = \frac{3}{10};\ \ W_4 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};$$

Запишем искомое распределение относительных частот

x_i	2	3	4	5	6
W_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$

Контроль: $\frac{1}{6}+\frac{4}{15}+\frac{3}{10}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=1.$



Строим точки с координатами (x_i, n_i) и соединяем их последовательно отрезками. Полученная ломаная линия называется полигоном частот.

Согласно определению эмпирической функцией распределения называется функция вида $F^*(x)=\frac{n_x}{n}$, где n – объем выборки; n_x - сумма частот вариант, меньших x.

Эмпирическая функция является оценкой функции распределения генеральной совокупности. Наименьшая варианта равна 2, поэтому при $x \le 2, n_x = 0$ и $F^*(x)=0.$ Значение x<3, а именно, $X = x_1 = 2$ наблюдалось 5 раз. Тогда для $2 < x \le 3$ $n_x = 5$ и $F^*(x)=\frac{5}{30}.$ Значение x< 4, а именно, x=2, x=3, наблюдалось 5+8=13 раз. Поэтому для $3 < x \le 4$ $n_x = 13$ и $F^*(x)=\frac{13}{30}.$

Аналогично рассуждая, получаем: для $4 < x \le 5$ $n_x = 5+8+9=22$ и $F^*(x)=\frac{22}{30}$, для

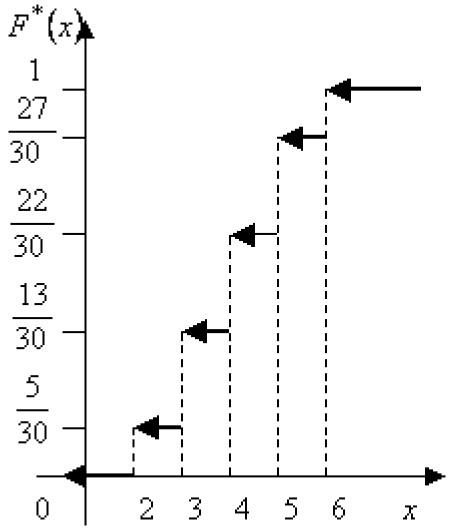
$5 < x \le 6$ $n_x = 5+8+9+5=27$ и $F^*(x)=\frac{27}{30}$

и при

$x > 6$ $n_x = 5+8+9+5+3=30$ и $F^*(x)=\frac{30}{30}=1.$ Таким образом,

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } & x \le 2; \\ \frac{5}{30} \text{ при } 2 < x \le 3; \\ \frac{13}{30} \text{ при } 3 < x \le 4; \\ \frac{22}{30} \text{ при } 4 < x \le 5; \\ \frac{27}{30} \text{ при } 5 < x \le 6; \\ 1 \text{ при } & x > 6. \end{cases}$$

График эмпирической функции имеет вид:



Пример 3.

Выборочно обследование 30 предприятий машиностроительной промышленности по валовой продукции и получены следующие данные, в млн. руб.:

18,0; 12,0; 11,9; 1,9; 5,5; 14,6; 4,8; 5,6; 4,8; 10,9; 9,7; 7,2; 12,4; 7,6; 9,7; 11,2; 4,2; 4,9; 9,6; 3,2; 8,6; 4,6; 6,7; 8,4; 6,8; 6,9; 17,9; 9,6; 14,8; 15,8.

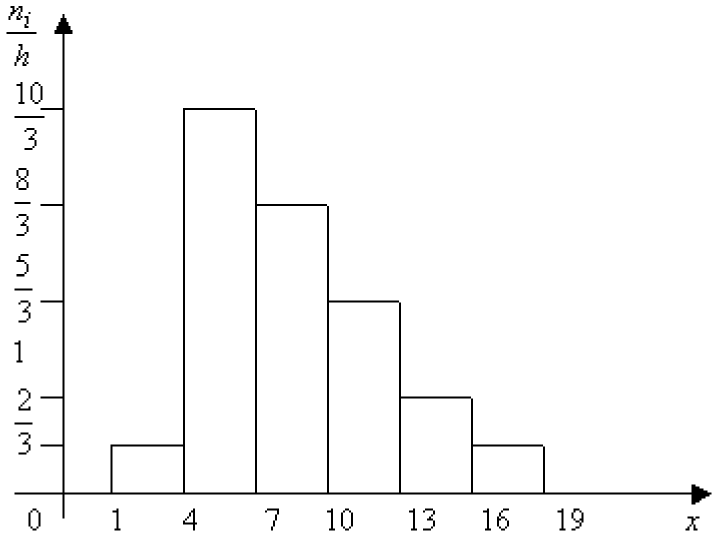
Составить интервальное распределение выборки с началом $x_0 = 1$ и длиной частичного интервала $h = 3$. Построить гистограмму частот.

Решение.

Для составления интервального распределения составим таблицу, в первой строке которой расположим в порядке возрастания интервалы, длина каждого из которых $h = 3$. Во второй строке запишем количество значений признака в выборке, попавших в этот интервал (т.е. сумму частот вариант, попавших в соответствующий интервал):

$(x_i; x_{i+1})$	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
n_i	2	10	8	5	3	2

Объем выборки n = 2 + 10 + 8 + 5 + 3 + 2 = 30.



Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладываем частичные интервалы, на каждом из них строим прямоугольники высотой $\frac{n_i}{h}$, где n_i - частота i-го частичного интервала, h – шаг (длина интервала).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.

Основные источники:

1. В.Т. Лисичкин, И.Л. Соловейчик. Математика в задачах с решениями. М., «Лань», 2018.
2. Н.В.Богомолов. Практические занятия по математике. - М.: Высшая школа, 2003.
3. Дадаян, А.А. Математика. - М.: ФОРУМ: ИНФРА, 2003.
4. Спирина М.С., Спирин П.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Академия, 2011.

Дополнительные источники:

1. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа: в 2 т. М., «Высшая школа», 1981.
2. В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский. Элементы высшей математики. М., «Академия», 2007.
3. Г.М. Фихтенгольц. Основы математического анализа. М., «Наука», 1968. Т. 1-2.
4. П.Т. Апанасов, М.И. Орлов. Сборник задач по математике. М., «Высшая школа», 1987.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.

Вариант 1.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки:

   B1(-1;2), B2(5;3).

2. Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением:

   $$9x^2 - 16y^2 = 144.$$

3. Вычислить предел функции:

   $$\lim_{x \to 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{5 + 14x - 3x^2}$$

4. Вычислить предел функции:

   $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^{2x-1}$$

5. Исследовать функцию на непрерывность:

   $$y = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 2 \\ x - 1, & x > 2 \end{cases}$$

6. Найти производную функции $y = ln(sin^2 x + 1)$.

   Найти производную третьего порядка функции $y = 5x^4 - sin\,4x$.

7. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x^{1/2} + 5x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$, $x_0 = 4$.

8. Материальная точка движется по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=3 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

9. Исследовать функцию с помощью первой и второй производной:

   $$y = x - \frac{1}{x}.$$

10. Вычислить интеграл непосредственным интегрированием:

    $$\int (5\cos x + 3x - 2^x + 7x^4)dx$$

    Вычислить интеграл методом замены переменной:

    $$\int \frac{dx}{\sqrt{3x+5}}$$

    Вычислить интеграл по частям:

    $$\int (8x - 3)\sin x\, dx$$

11. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

    $$y = {}^{2}/_{x}, y = x + 1, y = 0, x = 4$$

12. Решить ДУ с разделяющимися переменными:

    $$y' = x(y^2 + 1)$$

13. Решить простейшее ДУ второго порядка:

    $$y'' = \sin x;$$

14. В автопробеге участвуют три автомобиля, причем первый придет к финишу с вероятностью 0,84, второй – с вероятностью 0,88, третий – с вероятностью 0,8. Определить вероятность того, что к финишу прибудут два автомобиля.

15. Случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	1	2	4	7	8
p_i	0,12	0,16	0,15	0,28	?

Найти недостающее значение вероятности, построить график функции распределения, определить числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, моду и медиану.

16. Проводилось выборочное обследование продуктивности коров на молочных фермах Северо-Западного экономического региона РФ. Получены следующие результаты:

Надой за год, л	3000 - 3400	3400 - 3800	3800 - 4200	4200 - 4600	4600 – 5000
Количество коров	43	71	102	64	27

Построить гистограмму и полигон частот, график эмпирической функции распределения

Вариант 2.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки:

   B1(1;-2), B2(6;0)

2. Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет эллипса, заданного уравнением:

$$9x^2 + 16y^2 = 144.$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-3}{3x+5}\right)^{x+1}$$

5. Исследовать функцию на непрерывность:

$$y=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1\\ 2x, & 1<x\le 3\\ x-2, & x>3\end{cases}$$

6. Найти производную функции $y = \sqrt{x^4 + 5x}$.

   Найти производную третьего порядка функции $y = 3x^4 - \cos 4x$.

7. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x - x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1, x_0 = -2$.
8. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^3 + 4t^2$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=1 с. (Перемещение измеряется в метрах.)
9. Исследовать функцию с помощью первой и второй производной:

$$y = \frac{x-2}{x-3}$$

10. Вычислить интеграл непосредственным интегрированием:

$$\int (5\,sin\,x - 6x - 4^x + 7x^5)dx$$

   Вычислить интеграл методом замены переменной:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-8}}$$

   Вычислить интеграл по частям:

$$\int (9x-4)\cos x\,dx$$

11. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$$x + 2y + 8 = 0, y = 0, x = -4$$

12. Решить ДУ с разделяющимися переменными:

$$x + yy' = 0$$

13. Решить простейшее ДУ второго порядка:

$$y'' = \cos x;$$

14. В автопробеге участвуют три автомобиля, причем первый придет к финишу с вероятностью 0,84, второй – с вероятностью 0,88, третий – с вероятностью 0,8. Определить вероятность того, что к финишу прибудут по крайней мере два автомобиля.

15. Случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	-2	3	5	8	11
p_i	0,21	0,15	0,18	0,25	?

Найти недостающее значение вероятности, построить график функции распределения, определить числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, моду и медиану.

16. Изучалось распределение населения одного из городов РФ по среднедушевому совокупному доходу в 2015 г. Получены следующие результаты:

Месячный доход, р	0-15000	15000-20000	20000-25000	25000 – 30000	30000 – 35000	35000 - 40000	40000 - 45000
Количество человек, тыс	70	326	342	250	120	80	26

Построить гистограмму и полигон частот, график эмпирической функции распределения.

Вариант 3.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки:

B1(4;7), B2(-8;3)

2. Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет эллипса, заданного уравнением:

$$4x^2 + 16y^2 = 64.$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \to 8} \frac{3x^2 - 40x + 128}{8 - x}$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+3} \right)^{3x-4}$$

5. Исследовать функцию на непрерывность:

$$y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le 2 \\ x-2, & x > 2 \end{cases}$$

6. Найти производную функции $y = \sin\left(\frac{x^5}{5cosx}\right)$.

   Найти производную третьего порядка функции $y = 8x^{3/4} - 5\cos 7x$.

7. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3x + x^5$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$, $x_0 = -2$.
8. Материальная точка движется по закону$x(t) = t^4 + 2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=2 с. (Перемещение измеряется в метрах.)
9. Исследовать функцию с помощью первой и второй производной:

$$y = \frac{x+2}{x-3}$$

10. Вычислить интеграл непосредственным интегрированием:

$$\int (10 \sin x - 3e^x + 6^x + 7\sqrt[3]{x^2})dx$$

Вычислить интеграл методом замены переменной:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{10x+11}}$$

Вычислить интеграл по частям:

$$\int (7x+2) \sin x \, dx$$

11. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$$y = {}^{5}/_{x}, y = 5, x = 5$$

12. Решить ДУ с разделяющимися переменными:

$$y' - \frac{2}{x+1} y = 0$$

13. Решить простейшее ДУ второго порядка:

$$y'' = x^{\frac{1}{3}}$$

14. В автопробеге участвуют три автомобиля, причем первый придет к финишу с вероятностью 0,84, второй – с вероятностью 0,88, третий – с вероятностью 0,8. Определить вероятность того, что к финишу прибудет не более двух автомобилей.

15. Случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	-3	-2	-1	0	1
p_i	0,15	0,21	0,13	0,32	?

Найти недостающее значение вероятности, построить график функции распределения, определить числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, моду и медиану.

16. В универсаме проводилась контрольная проверка массы расфасованных товаров, которая дала следующие результаты:

Ошибка взвешивания, г	15…-10	10…-5	5…0	0…5	5…10	10…15
Число наблюдений, попавших в данный интервал	25	44	112	67	32	20

Построить гистограмму и полигон частот, график эмпирической функции распределения.

Вариант 4.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки:

   B1(-2;7), B2(0;6)
2. Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением:

   $$4x^2 - 16y^2 = 64.$$
3. Вычислить предел функции:

   $$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x-3}$$
4. Вычислить предел функции:

   $$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+5} \right)^{3n-2}$$
5. Исследовать функцию на непрерывность:

   $$y = \begin{cases} -2x, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$
6. Найти производную функции $y = \operatorname{tg}(\sqrt{x + \ln(2x)}$.

   Найти производную третьего порядка функции $y = 10x^{1/2} + 5\sin 3x$.
7. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 6x - x^7$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$, $x_0 = -3$.
8. Материальная точка движется по закону$x(t) = \frac{1}{2}t^3 + 2t^2$. Найти скорость и ускорение в момент времени *t*=2 с. (Перемещение измеряется в метрах.)
9. Исследовать функцию с помощью первой и второй производной:

   $$y = \frac{x+1}{x-3}$$
10. Вычислить интеграл непосредственным интегрированием:

    $$\int (3\cos x + 8x - \ 9^x + 10x^{5/2}) dx$$

    Вычислить интеграл методом замены переменной:

    $$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-8}}$$

    Вычислить интеграл по частям:

    $$\int (7x+2) cosxdx$$
11. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

    $$y = 2x, y = 0, x = 3$$
12. Решить ДУ с разделяющимися переменными:

    $$y' = x(y^2 + 5)$$
13. Решить простейшее ДУ второго порядка:

    $$y'' = 3\sin x;$$
14. В автопробеге участвуют три автомобиля, причем первый придет к финишу с вероятностью 0,84, второй – с вероятностью 0,88, третий – с вероятностью 0,8. Определить вероятность того, что к финишу прибудет только один автомобиль.

15. Случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	1	4	7	8	10
p_i	0,23	0,17	0,18	0,25	?

Найти недостающее значение вероятности, построить график функции распределения, определить числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, моду и медиану.

16. На станции технического обслуживания автомобилей исследовались затраты времени на ремонт карбюратора. Были зафиксированы следующие результаты:

Затраты времени, мин	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
Число наблюдений, попавших в данный интервал	8	12	43	47	24	16

Построить гистограмму и полигон частот, график эмпирической функции распределения.

Вариант 5.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки:
$$B1(-7;3),\ B2(-2;-3)$$
2. Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением:
$$4x^2 - 25y^2 = 100.$$
3. Вычислить предел функции:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - 1}{5 - x + 4x^2}$$
4. Вычислить предел функции:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$$
5. Исследовать функцию на непрерывность:
$$y = \begin{cases} x + 2, & x \le -1 \\ x^2 + 1, & -1 < x \le 1 \\ 3 - x, & x > 1 \end{cases}$$
6. Найти производную функции $y = \cos\left(\frac{x^5}{5lnx}\right)$.

   Найти производную третьего порядка функции $y = 8x^5 + \frac{1}{3}\cos 2x$.
7. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x + x^5 - 3x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1, x_0 = -1$.
8. Материальная точка движется по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^3 + 2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=1 с. (Перемещение измеряется в метрах.)
9. Исследовать функцию с помощью первой и второй производной:
$$y = \frac{x+1}{x-1}$$
10. Вычислить интеграл непосредственным интегрированием:
$$\int (2\cos x - 2x - 20^x + 10x^{3/2})dx$$
    Вычислить интеграл методом замены переменной:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-8}}$$
    Вычислить интеграл по частям:
$$\int (8x-5)sinxdx$$
11. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:
$$y = 2x, y = 0, x = 4$$
12. Решить ДУ с разделяющимися переменными:
$$y' = 5x(y^2 + 3)$$
13. Решить простейшее ДУ второго порядка:
$$y'' = 3\cos x;$$
14. В автопробеге участвуют три автомобиля, причем первый придет к финишу с вероятностью 0,84, второй – с вероятностью 0,88, третий – с вероятностью 0,8. Определить вероятность того, что к финишу прибудут не менее трех автомобилей.

15. Случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	1	4	7	8	10
p_i	0,19	0,21	0,15	0,24	?

Найти недостающее значение вероятности, построить график функции распределения, определить числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, моду и медиану.

16. Проведено выборочное обследование магазинов города. Имеются следующие данные о величине товарооборота для 50 магазинов города

Товарооборот, млн. руб.	25-75	75-125	125-175	175-225	225-275	275-325
Число магазинов	12	15	9	7	4	3

Построить гистограмму и полигон частот, график эмпирической функции распределения.

Вариант 6.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки:

   B1(9;-2), B2(-2;-6)

2. Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет эллипса, заданного уравнением:

   $$4x^2 + 25y^2 = 100.$$

3. Вычислить предел функции:

   $$\lim_{x \to -4} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4}$$

4. Вычислить предел функции:

   $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x - 1} \right)^{2x+1}$$

5. Исследовать функцию на непрерывность:

   $$y = \begin{cases} -2x, & x \le 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x \le 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$

6. Найти производную функции $y = \sqrt{\frac{2x - cos5x}{x^2 - 3}}$.

   Найти производную третьего порядка функции $y = 4x^{1/4} + 2\sin 2x$.

7. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x + x^4$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$, $x_0 = 2$.
8. Материальная точка движется по закону$x(t) = t^3 + 2t^2 - 5t$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=2 с. (Перемещение измеряется в метрах.)
9. Исследовать функцию с помощью первой и второй производной:

   $$y = \frac{x + 2}{x - 4}$$

10. Вычислить интеграл непосредственным интегрированием:

    $$\int (2\, sin\, x + 3x - \ 6^x + 7x^7) dx$$

    Вычислить интеграл методом замены переменной:

    $$\int \frac{dx}{\sqrt{3x + 1}}$$

    Вычислить интеграл по частям:

    $$\int (2x - 4) \cos x \, dx$$

11. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

    $$x + 2y + 4 = 0, y = 0, x = -6$$

12. Решить ДУ с разделяющимися переменными:

    $$y' = x(y + 1)$$

13. Решить простейшее ДУ второго порядка:

    $$y'' = 6\, x^2;$$

14. В автопробеге участвуют три автомобиля, причем первый придет к финишу с вероятностью 0,84, второй – с вероятностью 0,88, третий – с вероятностью 0,8. Определить вероятность того, что к финишу прибудут все автомобили.

15. Случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	1	4	7	8	10
p_i	0,12	0,27	0,14	0,26	?

Найти недостающее значение вероятности, построить график функции распределения, определить числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, моду и медиану.

16. Ряд распределения заработной платы рабочих механического цеха приведен в таблице

Заработная плата, тыс. руб.	22-26	26-30	30-34	34-38	38-42
Число рабочих	7	12	12	9	5

Построить гистограмму и полигон частот, график эмпирической функции распределения.

Составитель:

преподаватель первой категории
Слюсаренко К.В.

МАТЕМАТИКА

Методическое пособие по выполнению домашней контрольной работы по дисциплине «Математика» для студентов заочной формы обучения, обучающихся по специальности

350204 «Технология Технология комплексной переработки древесины».

Компьютерная верстка К.В. Слюсаренко