УДК 530

С.М. Базаров

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ОСНОВ МЕХАНИКИ

Введение. В классической механике движение рассматривается в координатном галилеевом пространстве-времени [Арнольдь, 1974] как прямое произведение $t\ x\ R^3$ оси времени t на 3-мерное линейное пространство R^3. Динамика начинается с формулировки трех законов Ньютона [Громов, 2002]: инерции, основного и взаимодействия. Третий закон Ньютона формулирует взаимодействие двух тел: силы, с которыми взаимодействуют любые два тела, всегда равны по модулю и противоположны по направлению (Ньютон: «действию всегда есть равное и противоположное противодействие»):

$$F_{12} + F_{21} = 0, \tag{1}$$

здесь F_{12} – сила, с которой 1-е тело действует на 2-е; F_{21} – сила, с которой 2-е тело действует на 1-е. Из размерности силы следует, что одно тело по отношению к другому имеет зеркальные координаты. В такой формулировке принцип взаимодействия отражает статическую связность, в основе которой лежит понятие «сила». При построении фундаментальных законов классической механики были сформулированы следующие понятия [Борн, 1972]:

– импульс силы (во времени) в виде произведения

$$J = t\,F, \tag{2}$$

здесь F – сила; t – время действия силы на тело;

– масса тела, как отношение импульса силы к изменению скорости, производимой импульсом силы,

$$m = J\,/\,v, \tag{3}$$

или

$$m = t\,F\,/\,v, \tag{3a}$$

как мера сопротивления тела в пространстве изменениям скорости;

– количество движения (импульса), как произведение массы на изменение скорости движения, производимой импульсом силы,

$$P = mv = J, \tag{4}$$

и его дифференциальная форма представления [Кнойбюль, 1982; Фейнман и др., 1977]

$$dP\ /\ dt = F_N, \tag{4a}$$

как второго закона динамики.

Формула второго закона (4*a*) построена из условия, что за короткое время действия импульс постоянной силы вызывает изменение импульса.

В представлении (2) импульс силы J является потенциалом, согласно (4) потенциалом является также количество движения P.

В представлении импульса сил третий закон Ньютона принимает вид закона сохранения импульса сил при столкновении двух тел

$$J_1 + J_2 = 0, \tag{5}$$

и закона сохранения количества движения

$$P_1 + P_2 = 0\ . \tag{6}$$

На основании (2) и (4) можно ввести осредненную во времени силу

$$F = mv\ /\ t = m\ w, \tag{7}$$

и представление массы как постоянного отношения

$$m = F\ /\ w, \tag{8}$$

здесь w – осредненное ускорение .

На основании (2) и (4) запишем цепочку равенств

$$J = tF = mv = P, \tag{9}$$

из которой следует сопряженное понятию «масса тела» (3) представление времени действия силы на тело

$$t = P\ /F, \tag{9a}$$

как мера сопротивления тела во времени изменениям силы.

Запишем (9*a*) в виде

$$t = m\ (v/F)$$

из которого следует представление времени воздействия силы на тело как механического (не геометрического) параметра. Из (9) следуют представления: масса тела движется в пространстве со скоростью v, а сила действует во времени t; масса тела может быть постоянной и переменной, это обстоятельство относится также к времени действия силы.

Исторически механика Ньютона перешла в аналитическую механику Лагранжа, Гамильтона в галилеевом пространстве-времени [Арнольд, 1974; Ландау, Лифшиц, 1973]. Цепочка равенств (9) отражает динамическую связность силы–времени–массы–скорости как единую взаимосвязанную систему.

В общем случае можно предположить, что в системе сила–время–масса–скорость с позиции системного анализа может возникать внутреннее функциональное время–пространство, отличное от координатного времени–пространства.

При замене времени t в (2) на координату x ($t \rightarrow x$) получаем импульс силы в пространстве

$$A_p = x\,F, \tag{9b}$$

где A_p – работа (потенциал), выполняемая силой F при перемещении тела на расстояние x. На основании второго закона динамики можно записать

$$dE = Fdx = dA, \tag{9c}$$

где $E = ½\, mv^2$ – кинетическая энергия.

На основании (9b) по аналогии с временем (9a) расстояние x можно рассматривать как меру сопротивления тела в пространстве изменению силы

$$x = A_p\,/\,F.$$

Целью исследования становится представление законов динамики в функционально связной системе сила–время–масса–скорость, в которой время воздействия на тело и его перемещение рассматриваются не как геометрические координаты, а как сопротивление, в известной мере сопряженное представлению массы. Импульс силы сообщает телу количество движения, при этом возникают три сопряженные меры сопротивления тела: массы, времени и перемещения.

***Методика исследования*.** При решении задач механики в общем случае сила является переменной величиной, действующей непрерывно во времени. На рис. 1 дан элемент графика зависимости силы во времени

$$F = f\,(t).$$

В координатах сила–время импульс силы J является потенциалом [Горячко, 1991], которому соответствует полный дифференциал в виде суммы сопряженных дифференциалов

$$dJ = F\,dt + t\,dF = (\partial J/\partial t)\,dt + (\partial J/\partial F)\,dF, \tag{10}$$

при

$$\partial^2 J/\partial F\partial t = \partial^2 J/\partial t\partial F\,.$$

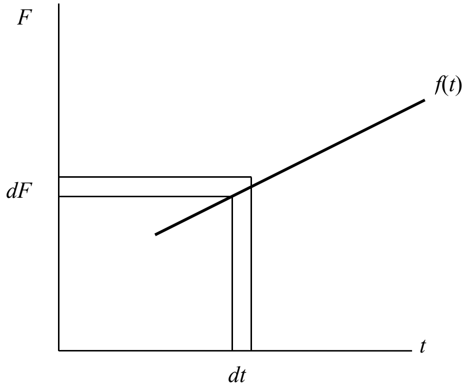

Рис. 1. Сопряженное дифференцирование (интегрирование) функции $F = f(t)$

Fig. 1: Conjugate differentiation (integration) of the function $F = f(t)$

Рассмотрим связность функции F(t) и обратной ей функции $t = f^{-1}(F)$ [Маделунг, 1968]:

$$F = f(t) \rightarrow t = f^{1}(F).$$

Интегрирование этих функций имеет сопряженный вид [Базаров, 2017]:

$$S_t = \int dt\,(F), \tag{11}$$

$$S_F = \int dF(t), \tag{11a}$$

и их сумма

$$\int dt\,(F) + \int dF(t) = \int dt(F + t\,dF/dt) = Ft = J, \tag{12}$$

или

$$Ft - \int dF(t) = \int dt\,(F), \tag{12a}$$

Здесь $\int dt\ (F)$ – интеграл Римана описывает импульс силы в классической механике (интегральное представление второго закона динамики); $\int dF(t)$ – интеграл Стилтьеса описывает уменьшение (увеличение) потенциального импульса силы, вызванное сопротивлением времени.

Из записи сопряженных производных (10) следует развитие представления системы сила–время:

$$dJ/dt = F + t\,dF/dt = F + F_t = F_p\,, \tag{13}$$

$$dJ/dF = t + F\,dt/dF = t + t_f = t_p\,. \tag{14}$$

Согласно (13) потенциальная сила F_p является суперпозицией сил воздействия на тело F и сопротивления движения во времени F_t (функциональная сила); в свою очередь согласно (14) потенциальное время t_p есть суперпозиция времени воздействия t и функционального t_f.

Для функции $F = f(t)$ отметим функциональную сопряженность производных в точке графика функции и их мультипликативную связанность: dF/dt – функциональная сила на единицу времени; dt/dF – функциональное время на единицу силы.

Данные сопряженные функциональные величины образуют в точке графика мультипликативную связь

$$(dF/dt)\,(dt/dF) = 1.$$

Результаты исследования. В полях переменных сил согласно (14) координатное время t определяется как разность времен потенциального t_p и функционального t_f:

$$t = t_p - t_f\,. \tag{15}$$

На основании (4а) представление (13) можно записать в виде

$$F_p = dP\,/\,dt = F + t\,dF/dt = F_N \tag{16}$$

тогда обобщенная формула второго закона механики принимает вид

$$dp/dt - t\,dF\,/dt = F, \tag{16а}$$

Видим, что при коротком времени действия силы или ее постоянстве она принимает форму второго закона механики в современном представлении.

При исследовании графиков действия переменных сил на тело рассмотрим три характерных режима изменения силы во времени.

На рис. 2 показаны три характерных графика изменения силы во времени: 1 – выпуклый (скорость силы растет), 2 – вогнутый (скорость силы уменьшается), OA – прямолинейный (скорость силы постоянная).

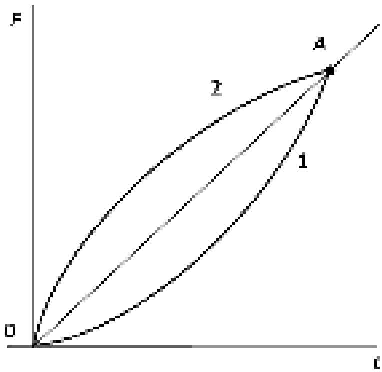

Рис. 2. Характерные графики изменения сил во времени
(1 – выпуклый, 2 – вогнутый, OA – прямолинейный)

Fig. 2. Characteristic plots of force changes in time
(1 – convex, 2 – concave, OA – straight line)

Анализ выпуклого графика представлен на рис. 3,*а*. Здесь имеет место дифференциальное и интегральное выражения

$$tdF/dt - p = F, \tag{17}$$

$$tdF/dt - \int t(d^2F/dt^2\,)dt = F, \tag{18}$$

или

$$F - t\,dF/dt + \int t(d^2/dt^2\,)dt = 0, \tag{19}$$

$$F + F_t = 0, \tag{20}$$

где

$$F_t = -\,tdF/dt + \int t(d^2F\,/dt^2)dt \tag{21}$$

выполняет роль силы противодействия в третьем законе Ньютона, в которой присутствует время взаимодействия как динамический параметр сопротивления.

Выпуклому графику пути соответствует увеличение скорости силы *dF/dt*.

Анализ вогнутого графика изменения силы показан на рис. 3,*б*. Для вогнутого графика изменения силы имеет место дифференциально-интегральное представление

$$F - tdF/dt = p, \tag{22}$$

$$F - tdF/dt = -\int t\,d^2F/dt^2)dt, \tag{23}$$

или

$$F - tdF/dt + \int t(d^2F/dt^2\,)dt = 0, \tag{24}$$

или

$$F + F_t = 0, \tag{25}$$

где

$$F_t = -\,tdF/dt + \int t(d^2F\,/dt^2)dt \tag{26}$$

выполняет роль силы противодействия в третьем законе Ньютона как силы сопротивления времени.

На вогнутом графике имеет место замедление скорости силы *dF/dt* .

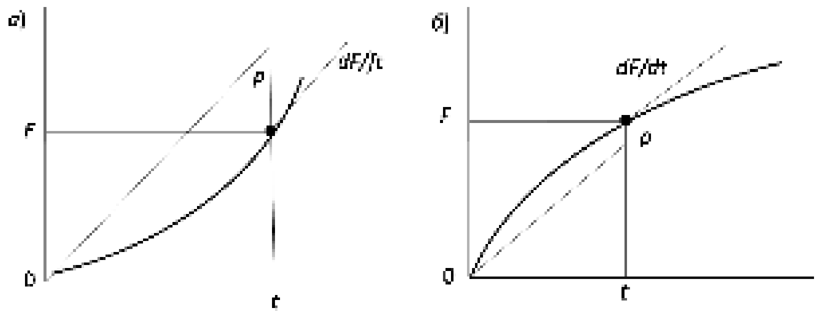

Рис. 3. Анализ *а* – выпуклого и *б* – вогнутого графика изменения силы во времени

Fig. 3. Analysis *a* – of the convex and *b* –of the concave graphs of force changes over time

При постоянной скорости изменения силы

$$F - t dF/dt = 0$$

функциональная сила равна силе воздействия.

Таким образом, в поле переменных сил третий закон механики Ньютона принимает вид формул (20), (21) и (25), (26); исходя из размерности силы, противодействие (сопротивление во времени) происходит в зеркальном пространстве.

Если на представленных рис. 1–3 время заменить координатой пространства ($t \to x$), то получим картину работы силы по перемещению тела по пространственной координате (импульса силы в пространстве) .

Согласно (9б) работа A_p является потенциалом, для которого полный дифференциал имеет вид

$$dA_p = F\,dx + x\,dF = (\partial A_p /\partial x)\,dx + (\partial A_p /\partial F)\,dF = dE. \tag{27}$$

Сопряженные производные здесь имеют вид

$$dA_p /dx = F + x\,dF/dx = F + F_x = F_{px}, \tag{28}$$

$$dA_p /dF = x + F\,dx/dF = x + x_x = x_{px}\,. \tag{29}$$

Для функции $F = f(x)$ имеет место сопряженность производных в точке графика функции и их мультипликативная связь: dF/dx – функциональная сила на единицу перемещения; dx/dF – функциональное перемещение х на единицу силы.

Данные сопряженные функциональные величины образуют в точке графика мультипликативную связность

$$(dF/dx)\,(dx/dF) = 1\,.$$

Согласно (28) потенциальная сила F_{px} является суперпозицией сил воздействия на тело F и сопротивления движения в пространстве F_x ; в свою очередь, согласно (29) потенциальное пространство x_{px} есть суперпозиция внешнего (координатного) пространства x и функционального x_x .

Запишем потенциальную работу в суперпозиции интегралов:

$$\int dx\,(F) + \int dF(x\,) = \int dx(\,F + x\,dF/dx) = Fx = A_p\,,$$

или

$$Fx - \int dF\,(x) = \int dx\,(F). \tag{30}$$

Здесь $\int dx\,(F)$ – интеграл Римана описывает работу силы в классической механике; $\int dF(x)$ – интеграл Стилтьеса описывает потерю потенциальной работы, вызванную сопротивлением пространства.

При $F = F_N$ соотношение (30) принимает вид

$$A_p - \int dF\,(x) = \tfrac{1}{2}\,m\,v^2\,. \tag{31}$$

Формулы (20), (21) и (25), (26) в пространстве принимают вид

$$F + F_x = 0, \tag{31}$$

где

$$F_x = -x(dF/dx) + \int dx\ [(d^2F\ /dx^{\ 2})] \tag{32}$$

выполняет роль силы противодействия пространства в третьем законе Ньютона.

Если на рис. 1 сделать гомотетию координат

$$F\ /\ m = v\ /\ t,$$

то придем к графику рис. 4 ($F \to m$, $t \to v$).

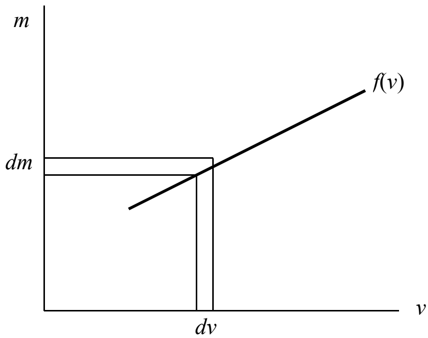

Рис. 4. Сопряженное дифференцирование (интегрирование) функции $m = f(v)$

Fig. 4. Conjugate differentiation (integration) of the function $m = f(v)$

В координатах масса–скорость количество движения P является потенциалом, которому соответствует полный дифференциал в виде суммы сопряженных дифференциалов:

$$dP = d(mv) = m\ dv + v\ dm = (\partial P/\partial v)\ dv + (\partial P/\partial m)\ dm \tag{33}$$

при

$$\partial^2 P/\partial m\partial v = \partial^2 P/\partial v\partial m\ .$$

Интегрирование для сопряженных функций

$$m = f\,(v) \to v = f^{1}\ (m)$$

имеет вид

$$S_v = \int dv\ (m) \tag{33a}$$

и

$$S_m = \int dm(v); \tag{34}$$

суперпозиция

$$\int dv\,(m) + \int dm(v\,) = \int dv(\,m + v\,dm/dv) = mv = P,$$

или

$$mv - \int dm(v) = \int dv\,(m). \qquad (35)$$

Здесь $\int dv\ (m)$ – интеграл Римана описывает количество движения в классической механике; $\int dm(v)$ – интеграл Стилтьеса описывает потерю потенциального количества движения, вызванного преодолением сопротивления, вызванного изменением массы.

Запишем сопряженные производные

$$dP/dv = m + v\,dm/dv = m + m_v = m_p\,, \qquad (36)$$

$$dP/dm = v + m\,dv/dm = v + v_m = m_p\,. \qquad (37)$$

Для функции

$$m = f(v)$$

отметим сопряженность производных в точке графика функции и их мультипликативную связь:

* dm/dv – функциональная масса на единицу скорости;
* dv/dm – функциональная скорость на единицу массы;
* $(dm\,/dv)\,(dv/dm) = 1$.

Согласно (36) потенциальная масса m_{p} является суперпозицией массы тела m и функциональной массы m_v; в свою очередь, согласно (37) потенциальное скорость v_p есть суперпозиция скорости в пространстве v и функциональной v_m .

Совместим полные дифференциалы потенциалов импульса силы и количества движения

$$dJ = F\,dt + t\,dF = m\,dv + v\,dm = dP, \qquad (38)$$

или

$$dJ\,/dt = F + t\,dF/dt = m\,dv/dt + v\,dm/dt = dP\,/\,dt = F_N\,. \qquad (39)$$

На основании (39) скорости движения тела в пространстве v и времени t можно записать сопряженные представления

скорости

$$v = (\,dJ/dt - m\,dv/dt)\,/(dm/dt) \qquad (40)$$

времени

$$t = (dP/dt - F)\,/\,(dF\,/dt), \qquad (41)$$

последнее (41) можно рассматривать как выражение движения тела во времени.

Таким образом, формула (40) описывает движение тела в пространстве в зависимости от скорости импульса силы, а формула (41) движение тела во времени, определяемое скоростью количества движения.

Если на представленных рис. 1–3 силу F заменить мощностью N ($F \rightarrow N$), то получим потенциальное представление энергии

$$\int dt\,(N) + \int dN(t) = \int dt(\,N + t\,dN/dt) = Nt = E, \tag{42}$$

или

$$E = Nt - \int dN(t) = \int dt\,(N), \tag{43}$$

$$dE/dt = N + t\,dN/dt, \tag{44}$$

$$dE/dt - t\,dN/dt = N. \tag{45}$$

Здесь $\int dt\,(N)$ – интеграл Римана описывает энергию в классической механике; $\int dN(t)$ – интеграл Стилтьеса описывает изменение потенциальной энергии, вызванное сопротивлением времени.

Выводы. Современные формулы законов динамики в механике, записанные в дифференциальной форме, получены в условиях действия силы в виде импульса силы, действующего на тело за короткий промежуток времени и короткое перемещение в пространстве. Их обобщенное представление в условиях непрерывного во времени и пространстве действия сил является естественным и приводит к потенциальной динамике. В этой динамике сопряжено присутствуют интегралы Римана и Стилтьеса. Построенная потенциальная динамика удовлетворяет принципу соответствия в физике. Необходимо отметить, что система сила–время–масса–скорость представляет собой динамическую структуру, исследование которой следует выполнять с позиции системного анализа.

Библиографический список

Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. С. 432.

Астахов А.В. Механика. Кинетическая теория материи. М.: Наука, 1977. С. 381.

Базаров С.М. Этюды связностей полей пространства–времениппространства. СПб.: СПбГЛТУ, 2017. С. 28.

Борн Макс. Эйнштейновская теория относительности. М.: Мир, 1972. С. 368.

Громов С.В. Физика. М.: Просвещение, 2002. С. 383.

Горячко И.Г. Термодинамика макро-микромира. СПб.: ВНИИЖ, 1997. 102.

Кнойбюль Ф.К. Пособие для повторения физики. М.: Энергоиздат, 1981. С. 256.

Ландау Л.Д., *Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1973. С. 208.

Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Наука, 1968. С. 618.

Фейнман Р., *Лейтон Р.*, *Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 1. Современная наука о природе. Законы механики. М.: Мир, 1977. С. 263.

References

Arnold V.I. Mathematical methods of classical mechanics. Moscow: Nauka, 1974, p. 432.

Astakhov A.V. Mechanics. Kinetic theory of matter. Moscow: Nauka, 1977, p. 381.

Bazarov S.M. Etudes of connectivity fields of space-time space. St. Petersburg: Spbftu, 2017, p. 28.

Born Max. Einstein's theory of relativity. Moscow: Mir, 1972, p. 368.

Gromov S.V. Fizika. M. Prosveschenie, 2002, p. 383.

Goryachko I.G. Thermodynamics of the macro-microcosm. St. Petersburg: vniizh, 1997. 102.

Knoibul F.K. Manual for repeating physics. Moscow: Energoizdat, 1981, p. 256.

Landau L.D., *Lifshits E.M.* Mechanics. Moscow: Nauka, 1973, p. 208.

Madelung E. Mathematical apparatus of physics. Moscow: Nauka, 1968, p. 618.

Feynman R., *Leighton R.*, *Sands M.* Feynman lectures on physics. Volume 1.Modern science of nature. Laws of mechanics. Moscow: Mir, 1977, p. 263.

Материал поступил в редакцию 06.07.2020

Базаров С.М. Системный анализ основ механики // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2020. Вып. 232. С. 117–129. DOI: 10.21266/2079-4304.2020.232.117-129

Механика берет свое начало со статики. Основным понятием статики является понятие «сила». При нарушении равновесия возникает движение, которое определяется скоростью и ускорением в координатной системе пространство–время; скорость определяется как отношение мгновенного изменения координаты к соответствующему мгновенному изменению времени. В свою очередь изменение мгновенной скорости, т. е. ускорение, связано с воздействием силы за мгновенное время, и называется импульсом силы. Второй закон Ньютона как основной закон динамики сформулирован для воздействия на тело постоянной силы за короткий промежуток времени, т. е. импульса силы. Импульс силы вызывает изменение скорости движения тела; мерой сопротивления тела изменениям скорости является масса; произведением массы

на скорость вводится понятие «количество движения» (импульс). Поэтому второй закон Ньютона определяет силу как отношение изменения количества движения к короткому времени действия импульса силы. Короткое время действия силы является частным случаем непрерывного ее действия во времени. В данном исследовании импульс силы понимается в обобщенном представлении как произведение силы на непрерывное время действия. По аналогии импульсу силы во времени вводится импульс силы в пространстве. С позиции системного анализа графиков сила–время, масса–скорость, сила–пространство, мощность время построены дифференциальные и интегральные законы динамики потенциально связного взаимодействия соответственно сила–время–масса–скорость, сила–пространство–работа, мощность–время–энергия. Анализ полных дифференциалов потенциалов приводит к представлениям функционального времени и пространства, которые сопряжено дополняют время и пространство взаимодействия. Время и пространство действия силы в исследуемых системах по аналогии с массой рассматриваются как меры сопротивления тела изменениям силы, т. е. как механические параметры, а не геометрические. Интегральные законы динамики построены в виде суперпозиции интегралов Римана для прямых функций и интегралов Стилтьеса для обратных. Интегралы Римана описывают современную динамику, а интегралы Стилтьеса ее дополнение до потенциальной.

Ключевые слова: потенциал, время, пространство, дифференциал, интеграл.

Bazarov S.M. System analysis of basic of mechanics. *Izvestia Sankt-Peterburgskoj Lesotehniceskoj Akademii*, 2020, is. 232, pp. 117–129 (in Russian with English summary). DOI: 10.21266/2079-4304.2020.232.117-129

Mechanics starts with statics. The main concept of statics is the concept of force. When the equilibrium is disturbed, motion occurs, which is determined by the speed and acceleration in the space-time coordinate system; speed is defined as the ratio of an instantaneous change in the coordinate to the corresponding instantaneous change in time. In turn, the change in instantaneous speed, i.e. acceleration, is associated with the impact of a force in an instantaneous time, which is called the force pulse. The second law of Newton, as the basic law of dynamics, is formulated for the effect on the body of a constant force for a short period of time, i.e., the force impulse. The force pulse causes a change in the speed of the body; the measure of the body's resistance to changes in speed is the mass; the product of mass and speed is introduced the concept of the amount of movement (momentum). Therefore, Newton's second law defines force as the ratio of the change in the amount of motion to the short time of action of the force impulse. The short duration of the force is a special case of continuous time. In this study, the force impulse is understood in a generalized representation as the product of the force for a continuous time of action. By analogy with a force pulse in time, a force pulse in space is introduced. With the system chart analysis force-time, mass speed, force, space, power is the differential and integral laws of dynamics potentially Svyaznoy interaction, respectively, the power–time–weight–speed, power–space–work, power–time–energy. The analysis of complete potential differentials leads to representations of functional time and space that complement the interaction time and space. The time and space of the force action in the studied systems are considered by analogy with mass as measures of the body's resistance to changes in force, i. e. as mechanical parameters, rather than geometric ones. The integral laws of dynamics are constructed as a superposition of Riemann integrals for direct functions and stiltjes integrals for inverse functions. Riemann integrals describe modern dynamics, and stiltjes integrals describe its complement to the potential one.

Keywords: potential, time, space, differential, integral.

БАЗАРОВ Сергей Михайлович – старший научный сотрудник, профессор кафедры технологических процессов и машин лесного комплекса» Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета имени С.М. Кирова», доктор техничских наук.

194021, Институтский пер. д. 5, г. Санкт-Петербург, Россия. E-mail: s.bazarow@yandex.ru

BAZAROV Sergey M. – DSc (Technical), professor of «Technological processes and machines forest complex» department, St.Petersburg State Forest Technical University.

194021. Institutsky per. 5. Let. U. St. Petersburg. Russia. E-mail: s.bazarow@yandex.ru