

Е.Г. Хитров, А.В. Андронов, Е.В. Нестерова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БУССИНЕСКА ПРИ ОЦЕНКЕ СООТНОШЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ И КОНТАКТНОГО ДАВЛЕНИЯ

Введение. Применение методов механики контактного взаимодействия позволяет эффективно решать широкий спектр задач науки о лесозаготовительном производстве. Например, обоснование параметров и режимов работы движителей лесных машин, допустимых с точки зрения воздействия на грунт, выполняется на основе решения задачи о вдавливании индентора в деформируемое полупространство (задача Буссинеска) [Рудов и др., 2020; Шапиро, 2018]. Задача о вдавливании индентора в упругое полупространство также эффективно используется при моделировании процессов окорки древесины [Газизов, 2010; Шапиро, 2011; Шапиро, 2010] и измельчения древесных материалов [Бастриков, 2019; Бастриков, 2018а; Бастриков 2018б]. В целом, решение фундаментальной задачи Буссинеска широко используется в технических науках [Клишин, 2011; Морозов, 2010; Шадрюнова, 2015], поскольку на его основе удастся получить практически значимые результаты в области оценки распределения напряжений, возникающих в обрабатываемом материале под воздействием рабочего органа.

Цель нашего исследования – проанализировать результаты расчетов и установить соотношение максимального значения касательного напряжения и среднего значения давления по пятну контакта рабочего органа с обрабатываемым материалом.

Теоретическая основа исследования. Для оценки напряжений, возникающих в деформируемом массиве под воздействием индентора, воспользуемся решением теоретической задачи о вдавливании клина в упругое полупространство согласно [Sneddon, 1948]. Схема к решению задачи представлена на рис. 1.

Согласно работе [Sneddon, 1948], решение задачи в цилиндрической системе координат (выражения для напряжений σ , τ) имеет вид:

$$\frac{\alpha\sigma_z}{hE} = -\frac{1}{2(1-\nu^2)} \cdot (J_1^0 + \zeta J_2^0), \quad (1)$$

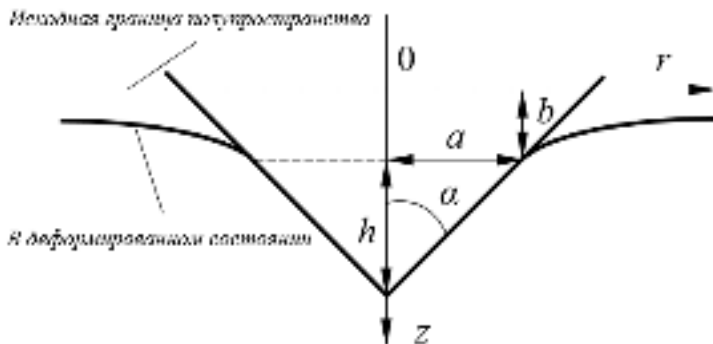


Рис. 1. Схема к решению задачи Буссинеска о вдавлении клина в деформируемое полупространство [Sneddon, 1948]

Fig. 1. Scheme for solving the Boussinesq's problem of indenting a cone into a deformable half-space [Sneddon, 1948]

$$\frac{a(\sigma_z + \sigma_r)}{hE} = -\frac{1}{1-\nu} \cdot J_1^0, \quad (2)$$

$$\frac{a\tau_{rz}}{hE} = -\frac{1}{2(1-\nu^2)} \cdot \zeta J_2^1, \quad (3)$$

где E – модуль упругости материала деформируемого массива, ν – коэффициент Пуассона, h – глубина вдавливания индентора, ζ, ρ – относительные координаты [Sneddon, 1948]:

$$\zeta = \frac{z}{a}, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad (4)$$

параметр a связан с глубиной вдавливания [Sneddon, 1948]:

$$a = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\pi} h, \quad (5)$$

J – определенные интегралы по формулам [Sneddon, 1948]:

$$J_1^0 = \frac{1}{2} \ln \frac{R^2 + 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2}{(\zeta + \sqrt{\rho^2 + \zeta^2})^2}, \quad (6)$$

$$J_2^0 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} - \frac{\cos \varphi}{R}, \quad (7)$$

$$J_2^1 = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{r}{R} \cos(\theta - \varphi) - \frac{\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} \right), \quad (8)$$

причем геометрические параметры φ , θ , r , R связаны соотношениями [Sneddon, 1948]:

$$\begin{aligned} r^2 &= 1 + \zeta^2, \quad \text{ctg } \theta = \zeta, \\ R^4 &= (\rho^2 + \zeta^2 - 1)^2 + 4\zeta^2, \quad 2\zeta \text{ctg } \varphi = \rho^2 + \zeta^2 - 1. \end{aligned} \quad (9)$$

На основании формул (1)–(3), (6)–(8) [Sneddon, 1948]:

$$\sigma_z = \frac{Eh}{a} \cdot f_{\sigma z}, \quad (10)$$

$$f_{\sigma z} = - \frac{R\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} \ln \frac{R^2 + 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2}{(\zeta + \sqrt{\rho^2 + \zeta^2})^2} - 2\zeta\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} \cos \varphi + 2R\zeta}{4R\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} (1 - \nu^2)},$$

$$\sigma_r = \frac{Eh}{a} \cdot f_{\sigma r}, \quad (11)$$

$$f_{\sigma r} = - \frac{R\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{R^2 + 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2}{(\zeta + \sqrt{\rho^2 + \zeta^2})^2} + \zeta \left(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} \cos \varphi - R \right)}{2R\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} (1 - \nu^2)},$$

$$\tau_{rz} = \frac{Eh}{a} \cdot f_{\tau rz}, \quad (12)$$

$$f_{\tau rz} = - \frac{r\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} \cos(\theta - \varphi) - R\zeta}{2\rho R\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} (1 - \nu^2)}.$$

Результаты исследования. Проанализируем распространение напряжений в деформируемом массиве. Обратим внимание, что напряжения по формулам (10)–(12) пропорциональны Eh/a и вспомогательным функциям f . Следовательно, для установления соотношений напряжений достаточно исследовать соотношения функций f , являющихся функциями координат ρ , ξ и коэффициента Пуассона ν .

Например, при $\nu = 0,25$ и $\zeta = 0,2$ функции $f_{\sigma z}$, $f_{\sigma r}$, $f_{\tau rz}$ будут изменяться по относительной координате ρ в соответствии с графиками, представленными на рис. 2.

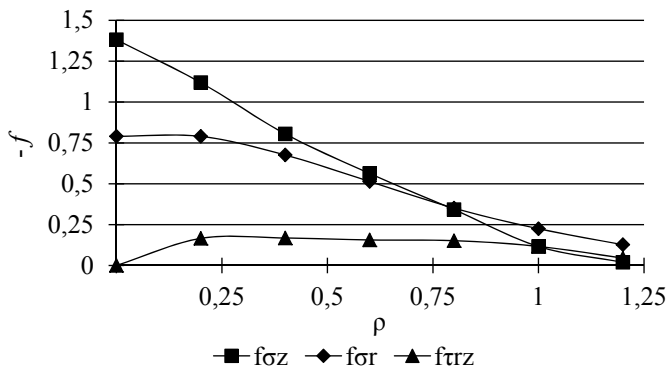


Рис. 2. Функции распространения напряжений в деформируемом массиве ($\nu = 0,25, \zeta = 0,2$)

Fig. 2. Functions of stress distribution in a deformable half-space ($\nu = 0,25, \zeta = 0,2$)

Обратим внимание, что многопараметрические функции f построены по оси ординат с отрицательным знаком, т. е. напряжения будут сжимающими. Такой масштаб выбран для улучшения визуального восприятия расчетных данных.

Графики показывают, что нормальное напряжение σ_z монотонно затухает по мере удаления от центра пятна контакта, а функции касательного напряжения τ_{rz} и нормального σ_r имеют точки экстремума; при этом максимальное напряжение σ_r меньше максимального σ_z . Качественно аналогичные результаты получим при варьировании координаты ζ (рис. 3–6).

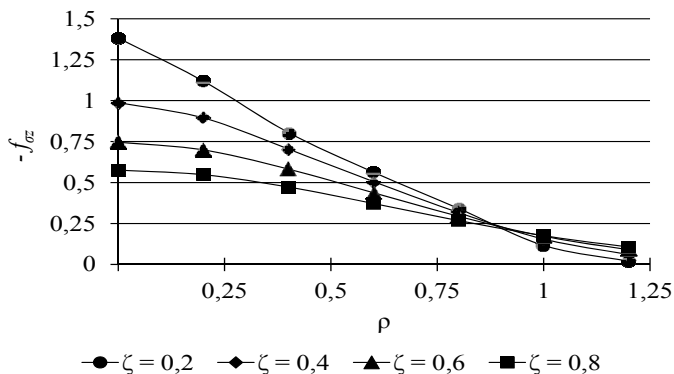


Рис. 3. Функция распространения нормального напряжения σ_z в деформируемом массиве

Fig. 3. Function of normal stress σ_z distribution in a deformable half-space

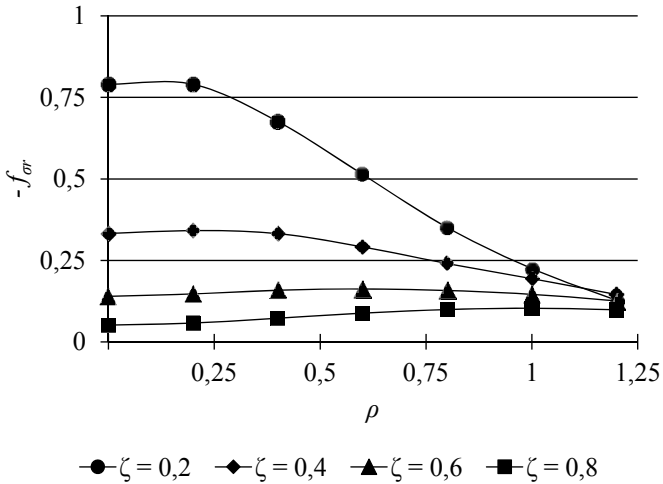


Рис. 4. Функция распространения нормального напряжения σ_r в деформируемом массиве

Fig. 4. Function of normal stress σ_r distribution in a deformable massif

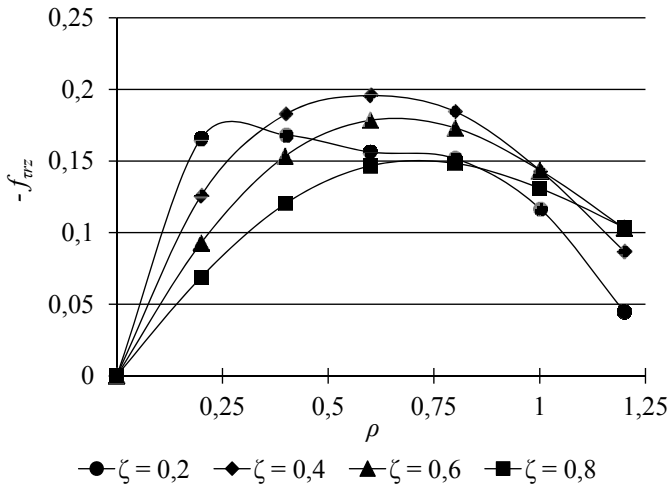


Рис. 5. Функция распространения касательного напряжения τ_{rz} в деформируемом массиве

Fig. 5. Function of shear stress τ_{rz} distribution in a deformable half-space

Нормальные напряжения σ_z и σ_r остаются сжимающими в исследованном диапазоне изменения координат ξ , ρ . С учетом того обстоятельства, что прочность как древесных материалов, так и грунтов на сдвиг ниже прочности на сжатие, особый интерес с точки зрения воздействия на измельчаемый материал представляет касательное напряжение τ_{rz} .

Зададимся целью определить соотношения среднего давления по поверхности контакта индентора с материалом σ_0 и τ_{rz} .

Вначале опишем затухание нормального напряжения σ_z по направлению воздействия индентора. Как показали результаты расчетов (см. рис. 3), максимальное значение σ_z отмечается при $\rho = 0$. На рис. 6 приведем результаты расчета функции f_{σ_z} при варьировании ζ .

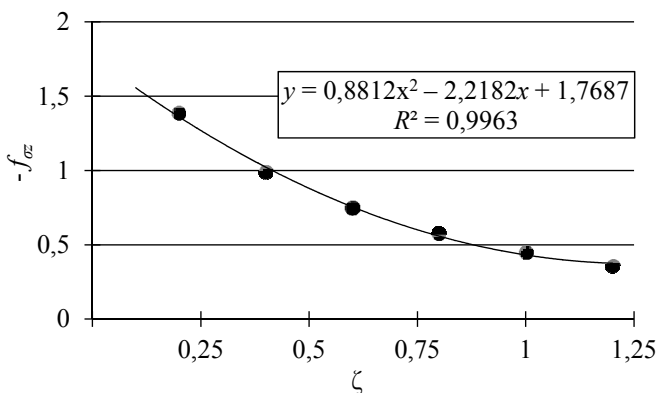


Рис. 6. Функция распространения нормального напряжения σ_z в деформируемом массиве ($\rho = 0$)

Fig. 6. Function of normal stress σ_z distribution in a deformable half-space ($\rho = 0$)

Анализ данных показывает, что характер затухания напряжения σ_z по глубине деформируемого массива хорошо описывается квадратичной функцией:

$$-f_{\sigma_z} = 0,8812\zeta^2 - 2,2182\zeta + 1,7687. \quad (13)$$

Тогда, условно принимая $\sigma_z(0,0) = \sigma_0$ и учитывая (10), (13), получим функцию затухания нормального напряжения по глубине, проиллюстрированную графиком на рис. 7.

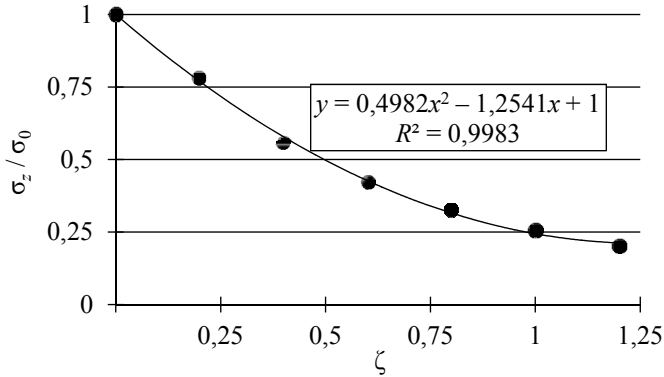


Рис. 7. Отношение среднего давления по пятну контакта к нормальному сжимающему напряжению по глубине деформируемого массива (по направлению воздействия индентора)

Fig. 7. Ratio of the average pressure over the contact patch to the normal stress along the z -axis (in the direction of the indenter action)

Введем поправочный коэффициент затухания нормального напряжения σ_z по направлению воздействия индентора:

$$\sigma_z = k_{\sigma z} \sigma_0. \quad (14)$$

Полученные расчетные данные хорошо описываются квадратичной функцией:

$$k_{\sigma z} = 1 - 1,2541\zeta + 0,4982\zeta^2. \quad (15)$$

Как показали результаты расчетов (рис. 5), функция $f_{\tau_{rz}}$ имеет экстремум, причем значения функции в нем зависят как от ζ , так и от ρ . На рис. 8 относительно координаты ζ проиллюстрированы результаты численного определения экстремума функции $f_{\tau_{rz}}$ при варьировании ζ , ρ .

Сопоставив полученные данные с функцией нормального напряжения σ_z , получим соотношение максимального по модулю касательного напряжения τ_{rz} и давления σ_0 в соответствии с графиком, представленным на рис. 9.

Расчеты при варьировании коэффициента Пуассона ν показывают, что соотношение максимального τ_{rz} и σ_0 остается практически неизменным. Таким образом, максимальное по модулю касательное напряжение составляет 11–12% среднего контактного давления.

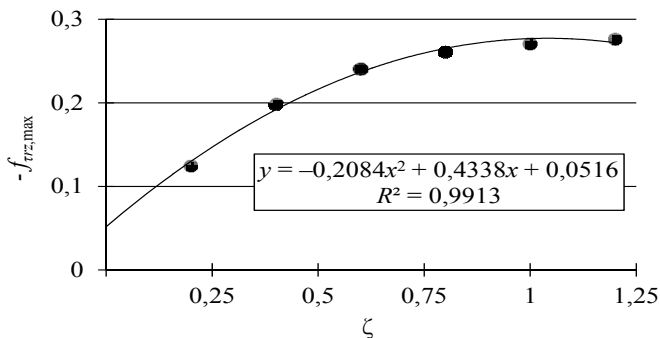


Рис. 8. Экстремум функции распространения касательного напряжения τ_{rz}

Fig. 8. The extremum of the shear stress function τ_{rz}

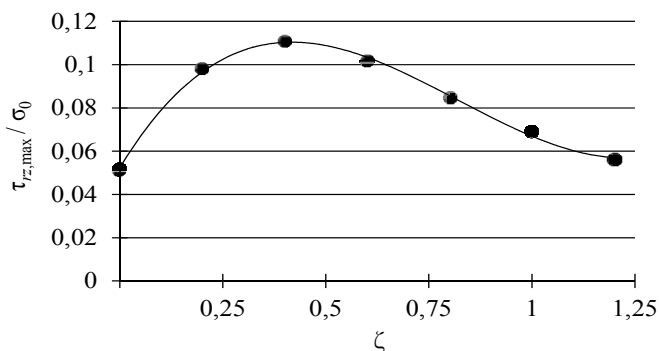


Рис. 9. Соотношение максимального касательного напряжения τ_{rz} и нормального давления σ_0

Fig. 9. Ratio of the maximum shear stress τ_{rz} to normal pressure σ_0

Закключение. На основании результатов анализа решения теоретической задачи о вдавливании клина в деформируемую среду, получим условие разрушения деформируемого массива под воздействием индентора:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_0 > \sigma_{сж} \\ \sigma_0 > \frac{1}{0,115} \sigma_{сдв} \end{array} \right. , \quad (16)$$

где $\sigma_{сж}$ – предел прочности материала при сжатии, $\sigma_{сдв}$ – предел прочности материала при сдвиге.

Библиографический список

Бастриков Д.В., Власов Ю.Н., Ильюшенко Д.А., Кучер С.В. Исследование процесса измельчения отходов окорки установкой с ножевым рабочим органом // Ремонт. Восстановление. Модернизация. 2019. № 3. С. 21–25.

Бастриков Д.В., Власов Ю.Н., Кучер С.В. Исследование энергоемкости измельчения отходов окорки установкой с ножевым рабочим органом // Лесотехнический журнал. 2018. Т. 8. № 1 (29). С. 120–128.

Бастриков Д.В., Власов Ю.Н., Кучер С.В., Куницкая Д.Е. Анализ исследований по повышению энергоэффективности измельчения отходов окорки // Resources and Technology. 2018. Т. 15. № 4. С. 1–30.

Газизов А.М., Шапиро В.Я., Григорьев И.В., Гумерова О.М. Моделирование процесса разрушения коры при окорке резанием // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2010. № 193. С. 211–221.

Клишин И.В. Особенности процесса разрушения горных пород механическим способом // Вестник КузГТУ. 2011. № 5. С. 28–30.

Морозов Е.М., Зернин М.В. Контактные задачи механики разрушения // Изд. 2-е. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 546 с.

Рудов С.Е., Шапиро В.Я., Григорьев И.В., Куницкая О.А., Григорьева О.И. Исследование процесса разрушения мерзлых и оттаивающих почвогрунтов при воздействии трелевочной системы // ИВУЗ. Лесной журнал. 2020. № 2 (374). С. 101–117.

Шадрунова И.В., Горлова О.Е., Колодежная Е.В., Кутлубаев И.М. Механизм дезинтеграции металлургических шлаков в аппаратах центробежно-ударного дробления // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2015. № 2. С. 149–155.

Шапиро В.Я., Григорьев И.В., Газизов А.М. Теоретическое исследование процесса разрушения массива грунта сферическими ножами при использовании комбинированных конструкций грунтометов для тушения лесных пожаров // ИВУЗ. Лесной журнал. 2018. № 1 (361). С. 61–69.

Шапиро В.Я., Григорьев И.В., Гулько А.Е. Анализ методов расчета параметров и обоснование математической модели разрушения коры при групповой окорке древесины // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. 2011. № 8 (121). С. 92–96.

Шапиро В.Я., Григорьева О.И., Григорьев И.В., Григорьев М.Ф. Обоснование и расчет параметров селективной роторной окорки лесоматериалов // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2010. Вып. 190. С. 104–116.

Sneddon I. Boussinesq's problem for a rigid cone. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1948, 44(4), 492–507. DOI: 10.1017/S0305004100024518

References

Bastrikov D.V., Vlasov Iu.N., Iliushenko D.A., Kucher S.V. Issledovanie protsessa izmelcheniia otkhodov okorki ustanovkoi s nozhevym rabochim organom (Investigation of the process of crushing debarking waste by a plant with a knife working body). *Remont. Vosstanovlenie. Modernizatsiia*, 2019, no. 3, pp. 21–25. (In Russ.)

Bastrikov D.V., Vlasov Iu.N., Kucher S.V. Issledovanie energoemkosti izmelcheniia otkhodov okorki ustanovkoi s nozhevym rabochim organom (Investigation of the energy consumption of shredding debarking waste by an installation with a knife working body). *Lesotekhnicheskii zhurnal*, 2018, vol. 8, no. 1 (29), pp. 120–128. (In Russ.)

Bastrikov D.V., Vlasov Iu.N., Kucher S.V., Kunitskaia D.E. Analiz issledovaniu povysheniui energoeffektivnosti izmelcheniia otkhodov okorki (Analysis of studies to improve the energy efficiency of shredding debarking waste). *Resources and Technology*, 2018, vol. 15, no. 4, pp. 1–30. (In Russ.)

Gazizov A.M., Shapiro V.Ia., Grigorev I.V., Gumerova O.M. Modelirovanie protsessa razrusheniia kory pri okorke rezaniem (Modeling the process of bark destruction during debarking by cutting). *Izvestia Sankt-Peterburgskoj Lesotekhnicheskoi Akademii*, 2010, is. 193, pp. 211–221. (In Russ.)

Klishin I.V. Osobennosti protsessa razrusheniia gornykh porod mekhanicheskim sposobom (Features of the process of destruction of rocks by mechanical means). *Vestnik KuzGTU*, 2011, no. 5, pp. 28–30. (In Russ.)

Morozov E.M., Zernin M.V. Kontaktnye zadachi mekhaniki razrusheniia (Contact problems of fracture mechanics). Izd. 2-e. M.: LIBROKOM, 2010. 546 p. (In Russ.)

Rudov S.E., Shapiro V.Ia., Grigorev I.V., Kunitskaia O.A., Grigoreva O.I. Issledovanie protsessa razrusheniia merzlykh i ottaivaiushchikh pochvogruntov pri vozdeistvii trevechochnoi sistemy (Investigation of the process of destruction of frozen and thawed soils under the influence of a skidding system). *IVUZ. Lesnoi zhurnal*, 2020, no. 2 (374), pp. 101–117. (In Russ.)

Shadrunova I.V., Gorlova O.E., Kolodezhnaia E.V., Kutlubaev I.M. Mekhanizm dezintegratsii metallurgicheskikh shlakov v apparatakh tsentrobezhno-udarnogo drobleniia (The mechanism of disintegration of metallurgical slag in centrifugal impact crushing apparatus). *Fiziko-tekhnichestkie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*, 2015, no. 2, pp. 149–155. (In Russ.)

Shapiro V.Ia., Grigorev I.V., Gazizov A.M. Teoreticheskoe issledovanie protsessa razrusheniia massiva grunta sfericheskimi nozhami pri ispolzovanii kombinirovannykh konstruksii gruntometov dlia tusheniia lesnykh pozharov (Theoretical study of the process of destruction of a soil mass by spherical knives when using combined structures of soil guns for extinguishing forest fires). *IVUZ. Lesnoi zhurnal*, 2018, no. 1 (361), pp. 61–69. (In Russ.)

Shapiro V.Ia., Grigorev I.V., Gulko A.E. Analiz metodov rascheta parametrov i obosnovanie matematicheskoi modeli razrusheniia kory pri gruppovoi okorke drevesiny (Analysis of methods for calculating parameters and substantiation of a mathematical model of destruction of bark during group debarking of wood). *Uchenye zapiski Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2011, no. 8 (121), pp. 92–96. (In Russ.)

Shapiro V.Ia., Grigoreva O.I., Grigorev I.V., Grigorev M.F. Obosnovanie i raschet parametrov selektivnoi rotornoi okorki lesomaterialov (Substantiation and calculation of parameters for selective rotary debarking of timber). *Izvestia Sankt-Peterburgskoj Lesotekhnicheskoi Akademii*, 2010, is. 190, pp. 104–116. (In Russ.)

Sneddon I. Boussinesq's problem for a rigid cone. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1948, 44(4), 492–507. DOI: 10.1017/S0305004100024518

Материал поступил в редакцию 01.11.2020

Нестерова Е.В., Хитров Е.Г., Андронов А.В. Решение задачи Буссинеска при оценке соотношения касательного напряжения и контактного давления // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2020. Вып. 233. С. 139–151. DOI: 10.21266/2079-4304.2020.233.139-151

Решение фундаментальной задачи Буссинеска широко используется в технических науках и позволяет эффективно решать широкий спектр задач науки о лесозаготовительном производстве. На его основе удастся получить практически значимые результаты в области оценки распределения напряжений, возникающих в обрабатываемом материале под воздействием рабочего органа. Цель нашего исследования – проанализировать результаты расчетов и установить соотношение максимального значения касательного напряжения и среднего значения давления по пятну контакта рабочего органа с обрабатываемым материалом. Теоретическую основу работы составляют уравнения распределения нормальных и касательных напряжений, возникающих в упругом полупространстве при вдавливании в него жесткого клина. В результате анализа теоретических расчетов показано, что характер затухания нормального напряжения по глубине деформируемого массива материала с высокой точностью аппроксимируется квадратичной функцией (на основе полученной приближенной функции выполнено сопоставление среднего давления по пятну контакта индентора с массивом и нормального напряжения по глубине массива). При этом, как показали результаты расчетов, функция распространения касательного напряжения в деформируемом массиве имеет экстремум. Выполнено сопоставление полученных данных по значению экстремума функции касательного напряжения со значением приближенной функции нормального напряжения на границе контакта индентора с

деформируемым массивом. В результате показано, что максимальное по модулю касательное напряжение составляет 11-12% среднего контактного давления. Расчеты проведены при варьировании коэффициента Пуассона материала массива, установленное соотношение остается практически неизменным.

Ключевые слова: нормальное напряжение, касательное напряжение, давление по пятну контакта, лесные грунты, древесные материалы, разрушение.

Khitrov E.G., Andronov A.V., Nesterova E.V. Solution of the Boussinesq's problem in evaluating ratio between shear stress and contact pressure. *Izvestia Sankt-Peterburgskoj Lesotekhniceskoj Akademii*, 2020, is. 233, pp. 139–151 (in Russian with English summary). DOI: 10.21266/2079-4304.2020.233.139-151

Solution of fundamental Boussinesq's problem is widely used in technical sciences and allows effectively solving a wide range of problems in forestry science. On its basis, it is possible to obtain practically significant results in the field of assessing the distribution of stresses arising in processed material under the influence of a working body. The purpose of our study is to analyze the results of calculations and establish the ratio of the maximum value of the shear stress and the average pressure over the contact patch of the working body with the material being processed. The theoretical basis of the work is formed by the equations for the distribution of normal and tangential stresses arising in an elastic half-space when a rigid cone is pressed into it. As a result of the analysis of the results of theoretical calculations, it was shown that the character of the normal stress distribution over the depth of the deformed massif of material is approximated with high accuracy by a quadratic function (based on the obtained approximate function, the average pressure over the contact patch of the indenter with the massif and the normal stress over the depth of the massif were compared). In this case, as shown by the results of calculations, the function of the shear stress distribution in the deformed massif has the extremum. Comparison of the obtained data on the value of the extremum of the shear stress function with the value of the approximate normal stress function at the interface of the indenter contact with the deformable mass is performed. As a result, it is shown that the maximum shear stress in absolute value is 11-12% of the average contact pressure. The calculations were carried out with varying Poisson's ratio of the massif material; the established ratio remains practically unchanged.

Key words: normal stress, shear stress, average contact pressure, forest soils, wood materials, crushing.

ХИТРОВ Егор Германович – доцент кафедры технологических процессов и машин лесного комплекса Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета имени С.М. Кирова. SPIN-код: 4663-5944.

194021, Институтский пер., д. 5, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: yegorkhitrov@gmail.com

KHITROV Egor G. – associate professor of the department of technological processes and machines of the forest complex of St.Petersburg State Forest Technical University. SPIN-code: 4663-5944.

194021. Institutskii per. 5. St. Petersburg. Russia. E-mail: yegorkhitrov@gmail.com

АНДРОНОВ Александр Вячеславович – доцент кафедры лесного машиностроения, сервиса и ремонта Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета имени С.М. Кирова. SPIN-код: 8345-3722.

194021, Институтский пер., д. 5, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: andronovalexandr@gmail.com

ANDRONOV Aleksandr V. – Associate Professor of the Department of Forest Engineering, Service and Repair of St.Petersburg State Forest Technical University. SPIN-code: 8345-3722.

194021. Institutskii per. 5. St. Petersburg. Russia. E-mail: andronovalexandr@gmail.com

НЕСТЕРОВА Евгения Владимировна – соискатель кафедры технологических процессов и машин лесного комплекса Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета имени С.М. Кирова. SPIN-код: 2010-1251.

194021, Институтский пер., д. 5, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: jenechka-72@mail.ru

NESTEROVA Evgenia V. – applicant of the department of technological processes and machines of the forest complex of St.Petersburg State Forest Technical University. SPIN-code: 2010-1251.

194021. Institutskii per. 5. St. Petersburg. Russia. E-mail: jenechka-72@mail.ru