5. ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ

УДК 519.6

Н.И. Федоренко

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Одной из трудностей, возникающих в связи с использованием ветвящихся процессов для решения нелинейных уравнений является выполнение так называемых мажорантных условий, ответственных за существование и конечность математического ожидания оценок, построенных на траекториях ветвящегося процесса.

В работе [Федоренко, 2001] была предложена оценка на траекториях ветвящегося марковского процесса, которой соответствует менее ограничительное мажорантное условие, нежели мажорантные условия из работ [Ермаков, 1972; Ермаков и др., 1983].

Вопрос выполнения мажорантного условия тесно связан со сходимостью итерационного процесса. В этой связи представляют интерес некоторые вспомогательные утверждения, доказанные для уравнения вида:

$$x = g(x), \tag{1}$$

где g – непрерывная функция с вещественными областью определения и областью значений и метода итераций для решения этого уравнения:

$$x_i = g(x_{i-1}), \quad i \geq 1, \tag{2}$$

с вещественным начальным приближением x_0. Очевидно каждое x_i также будет вещественным. Обозначим:

$$\varepsilon_i = x_i - x^*, \tag{3}$$

где x^* – решение уравнения (1).

Предположим, что функция g имеет непрерывную вторую производную. В таком случае по формуле Тейлора с остаточным членом второго порядка для некоторого ζ, выбранного между значениями x_{i-1} и x^*, можно записать:

$$\varepsilon_i = x_i - x^* = g(x_{i-1}) - g(x^*) = \varepsilon_{i-1} g'(x^*) + \frac{1}{2}\varepsilon_{i-1}^2 g''(\zeta). \tag{4}$$

Таким образом, для любого $\delta > 0$ можно найти $\eta = \eta(\delta) > 0$ такое, что при $|\varepsilon_{i-1}| < \eta$ будет выполняться неравенство

$$\frac{|\varepsilon_i|}{|\varepsilon_{i-1}|} < |g'(x^*)| + \delta. \tag{5}$$

Лемма 1. Если $\delta > 0$, $|\varepsilon_0| < \eta(\delta)$ и $x^* = g(x^*)$, то достаточным условием сходимости метода итераций (2) является условие:

$$|g'(x^*)| < \lambda < 1 - \delta. \tag{6}$$

Доказательство. Предположим, что условие (6) выполнено. В таком случае:

$$|g'(x^*)| + \delta < \lambda + \delta < 1.$$

Теперь с помощью (5) получаем:

$$\frac{|\varepsilon_i|}{|\varepsilon_{i-1}|} < \lambda + \delta < 1,$$

для каждого $i \geq 1$. Отсюда следует, что $|\varepsilon_i| < (\lambda + \delta)^i \eta(\delta) \to 0$ при $i \to \infty$. Учитывая (3), получаем, что $x_i \to x^*$ при $i \to \infty$.

Лемма 2. Если $|g'(x^*)| > \Lambda > 1$, то метод итераций (2) не является сходящимся.

Доказательство. Предположим, что итерационный метод сходится. В этом случае для любого $\alpha > 0$ существует положительное целое $I = I(\alpha) \geq 0$ такое, что $|\varepsilon_i| < \alpha$ для всех $i \geq I$. Кроме того, множество всех x_i ограничено. Поскольку производная $g''(x)$ непрерывна, то она ограничена на любом отрезке и существует М такое, что $|g''(\zeta)| < \mathrm{M}$ для $\zeta = \zeta(i)$ из (4). Отсюда следует, что

$$\frac{|\varepsilon_i|}{|\varepsilon_{i-1}|} > \Lambda - \frac{\mathrm{M}}{2}\alpha,$$

для всех $i > I(\alpha)$. Выбрав теперь $\alpha < 2(\Lambda - 1)/\mathrm{M}$, получим $\Lambda - \mathrm{M}\alpha/2 = \beta > 1$. Таким образом, $|\varepsilon_i| > \beta^{i-I}|\varepsilon_I| \to \infty$, что противоречит сходимости итерационного метода (2).

Лемма 3. Если $x^* = g(x^*)$ – вещественное и начальное приближение x_0 – вещественное, то достаточным условием для сходимости итерационного метода (2) является такое условие

$$F(x) = \frac{\left|g(x) - g(x^*)\right|}{\left|x - x^*\right|} < \mu \ < 1 \tag{7}$$

для всех x, которые удовлетворяют неравенству

$$\left|x - x^*\right| \le \left|x_0 - x^*\right| = |\varepsilon_0|.$$

Доказательство. По формуле (4) $|\varepsilon_i|/|\varepsilon_{i-1}| = F(x_{i-1})$. Если $|\varepsilon_i|/|\varepsilon_{i-1}| < \mu$ для всех $i \ge 1$, то $|\varepsilon_i| < \mu^i|\varepsilon_0| \to 0$, и итерационный метод сходится. Условие (7) эквивалентно требованию $|F(x_0)| < \mu$, $|F(x_1)| < \mu$, $|F(x_2)| < \mu$ и т. д.

Теорема 1. Достаточным условием для сходимости метода итераций (2) при некотором вещественном начальном значении x_0, удовлетворяющем условию $|\varepsilon_0| < \eta(\delta)$, является следующее условие: решение x^* уравнения (1) вещественное и

$$\left|g'(x^*)\right| < 1. \tag{8}$$

Доказательство. Выберем $\delta = \left(1 - \left|g'(x^*)\right|\right)/2 > 0$ и x_0 такое, что $|\varepsilon_0| = \left|x_0 - x^*\right| < \eta(\delta)$. Если выбрать $\lambda = 1 - 3\delta/2$, то $\left|g'(x^*)\ \right| = 1 - 2\delta < \lambda < 1 - \delta.$ Следовательно, выполнено достаточное условие леммы 1, и метод итераций (2) сходится.

Теорема 2. Достаточными условиями того, что метод итераций расходится, являются такие условия:

1) решение x^* уравнения (1) не вещественное

или

2) при вещественном решении x^*:

$$\left|g'(x^*)\right| > 1. \tag{9}$$

Доказательство. Условие 1 является достаточным так как, во-первых, если метод итераций сходится, то он сходится к решению уравнения (1), и, во-вторых, если $x^* = a + ib$, где $b \ne 0$, то вещественные итерации x_i должны удовлетворять условию $\varepsilon_i = \left|x_i - x^*\right| \geq |b|$. При этом $\varepsilon_i \not\to 0$. Если условие 2 выполнено, то всегда можно выбрать

$$\Lambda = \left(1 + \left|g'(x^*)\right|\right) / 2$$

и удовлетворить тем самым условию леммы 2.

Теорема 3. Если x^* – вещественное решение уравнения (1) и начальное приближение x_0 также вещественное, то достаточным условием сходимости метода итераций (2) является такое условие:

$$\max\left\{F(x) : \left|x - x^*\right| \leq \left|x_0 - x^*\right|\right\} < 1. \tag{10}$$

Доказательство. Обозначим

$$m = \max\left\{F(x) : \left|x - x^*\right| \leq \left|x_0 - x^*\right|\right\}$$

и выберем $\mu = (1 + m)/2$. Теперь требуемое следует из леммы 3.

Можно записать соотношения (8), (9) и (10) так:

$$-1 < g'(x^*) < 1, \tag{11}$$

$$g'(x^*) < -1 \quad \text{или} \quad g'(x^*) > 1,$$

$$\max\left\{F(x) : x^* - \left|x_0 - x^*\right| \leq x \leq x^* + \left|x_0 - x^*\right|\right\} < 1. \tag{12}$$

Поскольку утверждение теоремы 1 зависит от ограниченности ε_0, то воспользуемся для исследуемых ниже итерационных процессов достаточным условием, установленным в теореме 3. Пусть

$$g(x) = ax^2 + bx + c, \quad x_0 = c, \quad a > 0,$$

при этом

$$g'(x) = 2ax + b.$$

Корни уравнения (1) вещественны при условии

$$\Delta^2 = (b-1)^2 - 4ac \geq 0. \tag{13}$$

Из условия (7) следует (8), а условие $g'(x^*) < 1$ выполняется лишь для корня

$$x^* = (1 - b - \Delta) / 2a.$$

При этом

$$g'(x^*) = 1 - \Delta, \tag{14}$$

$$F(x) = \left|a(x + x^*) + b\right| = \left|ax + \frac{1}{2}(1 + b - \Delta)\right|.$$

Таким образом, $F(x)$ достигает своего максимума в любом интервале в одной из концевых точек, и условие (12) имеет вид:

$$\max\left\{F(c), F(2x^* - c)\right\} = \max\left\{F(c), F\left(\left(1-\Delta-b-ac\right)\right)/a\right\} = \\ = \max\left\{\left|1-\Delta+b+2ac\right|/2, \left|3-3\Delta-b-2ac\right|/2\right\} < 1. \quad (15)$$

Учитывая (11) и (14), получаем

$$\Delta < 2, \text{ то есть } 4ac > \left(b-3\right)\left(b+1\right). \quad (16)$$

Теперь из (15) и (16) следует

$$\left|b+2ac\right| < 3. \quad (17)$$

Таким образом (15) можно свести к неравенствам (16) и (17).

Рассмотрим следующий пример. Для уравнения

$$x = ax^2 - ax + \frac{1}{4}, \quad a > 0 \quad (18)$$

запишем метод итераций

$$x_i = ax_{i-1}^2 - ax_{i-1} + \frac{1}{4}, \quad i \geq 1, \quad (19)$$

$$x_0 = \frac{1}{4}.$$

Достаточными условиями сходимости итераций, получаемых в соответствии с равенством (19), являются условия

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{13}{4} \text{ и } a < 6,$$

полученные согласно с (16) и (17). Условие (13) выполнено для любого $a > 0$. Таким образом, при $a < (\sqrt{13} - 1)/2 \approx 1{,}302776$, метод итераций (19) сходится.

Первое мажорантное условие применительно к уравнению (18) заключается в сходимости итерационного метода вида

$$\overline{x}_i = a\overline{x}_{i-1}^2 + a\overline{x}_{i-1} + \frac{1}{4}, \quad i \geq 1, \quad (20)$$

$$\overline{x}_0 = \frac{1}{4}.$$

Достаточными условиями сходимости итераций, получаемых в соответствии с итерационным методом (20), являются такие условия:

$$\Delta^2 = a^2 - 3a + 1 \geq 0,$$

$$\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{21}{4} \text{ и } a < 2.$$

Следовательно, достаточным условием сходимости (20) является условие

$$a \leq \left(3 - \sqrt{5}\right)/2 \approx 0{,}382.$$

Второе мажорантное условие, рассматриваемое для уравнения

$$x = ax^2 + bx + c \tag{21}$$

заключается в существовании итерационного решения следующего уравнения:

$$\tilde{x} = a\tilde{x}^2 + \tilde{c},$$

где
$$\tilde{c} = \max\left\{|c|, \left|c + \frac{b}{a}\right|\right\}.$$

Таким образом, второе мажорантное условие считается выполненным для уравнения (21), если существует итерационное решение уравнения

$$\tilde{x} = a\tilde{x}^2 + \frac{3}{4}. \tag{22}$$

Достаточными же условиями сходимости метода итераций

$$\tilde{x}_i = a\tilde{x}_{i-1}^2 + \frac{3}{4}, \quad i \geq 1,$$

$$\tilde{x}_0 = \frac{3}{4}$$

являются условия $\Delta^2 = 1 - 3a \geq 0$ и $a < 2$.

Таким образом, при $a \leq \frac{1}{3} \approx 0{,}333$ итерационное решение уравнения (22) существует. Рассмотрим теперь третье мажорантное условие для уравнения (21), то есть условие на сходимость метода итераций

$$\tilde{\tilde{x}}_i = a\tilde{\tilde{x}}_{i-1}^2 + |b - d|\tilde{\tilde{x}}_{i-1} + \tilde{\tilde{c}}, \quad i \geq 1,$$

$$\tilde{\tilde{x}}_0 = \tilde{\tilde{c}},$$

где $\tilde{\tilde{c}} = \max\left\{|c|, \left|c + \frac{d}{a}\right|\right\}$; d – вещественное неравное нулю число.

Выберем $d = -\frac{1}{4}a$. При таком выборе d третье мажорантное условие для уравнения (18) представляет собой условие на сходимость следующего итерационного процесса:

$$\tilde{\tilde{x}}_i = a\tilde{\tilde{x}}_{i-1}^2 + \frac{3}{4}a\tilde{\tilde{x}}_{i-1} + \frac{1}{4}, \quad i \geq 1, \tag{23}$$
$$\tilde{\tilde{x}}_0 = \frac{1}{4}.$$

Достаточными условиями сходимости итерационного процесса (23) являются такие условия:

$$\Delta^2 = \frac{9}{16}\left(a - \frac{20}{9}\right)^2 - \frac{16}{9} \geq 0,$$
$$\left(a - \frac{20}{9}\right)^2 < \frac{832}{81} \text{ и } a < \frac{12}{5}.$$

Таким образом, при $a \leq \frac{4}{9} \approx 0,444$ метод итераций (23) сходится. Из рассмотренного примера видно, что при $(3-\sqrt{5})/2 < a \leq 4/9$ имеет место лишь третье мажорантное условие.

Библиографический список

Ермаков С.М. Метод Монте-Карло для итерации нелинейных операторов // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. № 2. С. 271–274.

Ермаков С.М., Сережина В.Г. Об алгоритмах обобщенного интегрирования при решении нелинейных уравнений. Деп. в ВИНИТИ 2.09.1983, № 5021–83. 21 с.

Федоренко Н.И. Об одной несмещенной оценке решения нелинейного интегрального уравнения // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2001. Вып. 9 (167). С. 172–182.

References

Ermakov S.M. Monte Carlo method for iterating nonlinear operators. *Reports of Academy of Sciences of the USSR*, 1972, vol. 204, no. 2, pp. 271–274. (In Russ.)

Ermakov S.M., Serezhina V.G. On generalized integration algorithms for solving nonlinear equations. Dep. in VINITI of September 2, 1983, No. 5021–83, 21 p. (In Russ.)

Fedorenko N.I. On one unbiased estimation of the solution of a nonlinear integral equation. *Izvestia Sankt-Peterburgskoj lesotehniceskoj akademii*, 2001, is. 9 (167), pp. 172–182. (In Russ.)

Материал поступил в редакцию 10.09.2018 г.

Федоренко Н.И. Некоторые условия сходимости метода итераций для решения нелинейного уравнения // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2018. Вып. 225. С. 260–267. DOI: 10.21266/2079-4304.2018.225.260-267

Одной из трудностей, возникающих в связи с использованием ветвящихся процессов для решения нелинейных уравнений является выполнение так называемых мажорантных условий, ответственных за существование и конечность математического ожидания оценок, построенных на траекториях ветвящегося процесса. Вопрос выполнения мажорантного условия тесно связан со сходимостью итерационного метода. В статье рассматриваются некоторые утверждения о сходимости метода итераций для решения нелинейного уравнения одного вида. На примере устанавливается меньшая ограничительность мажорантного условия, соответствующего полученным утверждениям.

Ключевые слова: ветвящийся процесс, нелинейное уравнение, математическое ожидание, метод итераций, мажорантное условие.

Fedorenko N.I. Some conditions for convergence of the method of iterations for solving a nonlinear equation. *Izvestia Sankt-Peterburgskoj Lesotehniceskoj Akademii*, 2018, is. 225, pp. 260–267 (in Russian with English summary). DOI: 10.21266/2079-4304.2018.225.260-267

One of the difficulties arising in connection with the use of branching processes for solving nonlinear equations is the fulfillment of the so-called majorant conditions responsible for the existence and finiteness of the mathematical expectation of estimates built on the trajectories of the branching process. The question of the fulfillment of the majorant condition related to the convergence of the iterative method. The article discusses some of the statements about the convergence of the iteration method for solving a nonlinear equation of the definite type. A less restrictive majorant condition is established on the example.

Keywords: branching process, nonlinear equation, mathematical expectation, iteration method, majorant condition.

ФЕДОРЕНКО Наталья Ивановна – доцент кафедры высшей математики Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета имени С.М. Кирова, кандидат физико-математических наук.

194021, Институтский пер., д. 5, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: natali.fedorenko.56@mail.ru

FEDORENKO Natalia I. – PhD (Physics-mathematical sciences), associate professor of department of Mathematics of St.Petersburg State Forest Technical University.

194021. Institute per. 5. St. Petersburg. Russia. E-mail: natali.fedorenko.56@mail.ru