

С.В. Алексеева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОГО ТИПА ТРЕХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА РОБОТА

Введение. Математическое моделирование различных производственных процессов и механизмов в настоящее время является актуальной задачей в связи с необходимостью определения условий и параметров, при которых будут достигнуты установленные критерии оптимальности. Манипуляторы роботов имеют широкое применение, в том числе используются в лесозаготовительной и деревообрабатывающей отраслях промышленности. В связи с этим целью работы являлась задача нахождения аналитических моделей динамики трехзвенного манипулятора робота, имеющего вращательную, поступательную и вращательную кинематические пары пятого класса. Все возможные кинематические схемы таких манипуляторов представлены на рис. 1–3.

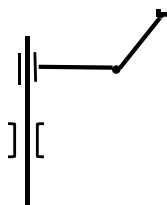


Рис. 1

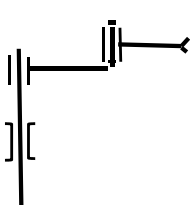


Рис. 2

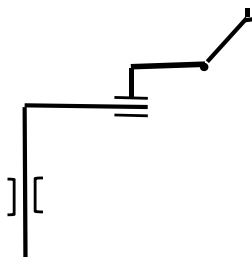


Рис. 3

Кинематические схемы манипуляторов с вращательной, поступательной
и вращательной степенями подвижности

Kinematic schemes of manipulators with rotational, translational
and rotational degrees of mobility

Рассмотрим трехзвенный манипулятор, структурная кинематическая схема которого приведена на рис 1. Будем решать задачу нахождения основных кинематических соотношений, определяющих положение, скорость и ускорение звеньев манипулятора и уравнений его динамики . Все кинема-

тические пары указанного манипулятора являются кинематическими парами пятого класса. Для однозначного определения его конфигурации необходимо ввести обобщенные координаты. Если предположить, что все звенья $i = 1, 2, 3$ являются абсолютно твердыми телами, тогда в качестве обобщенных координат $q = (q_1, q_2, q_3)^T$ можно принять углы относительных поворотов и линейного относительного смещения звеньев. Предположим, что манипулятор расположен на неподвижном основании, с которым свяжем ДПСК $O_0x_0y_0z_0$. С каждым звеном манипулятора свяжем ДПСК $O_ix_iy_iz_i$.

Выбор ДПСК, связанной со звеном i , выполним следующим образом:

- 1) ось z_i направим по оси кинематической пары $(i, i + 1)$.
- 2) ось x_i является общим перпендикуляром к осям z_i и z_{i-1} .
- 3) ось y_i выбирается таким образом, чтобы получаемая система координат была правой.

Со схватом манипулятора свяжем систему координат $O_3x_3y_3z_3$. Ось z_3 характеризует ориентацию оси захвата и направлена по оси последнего звена. Остальные оси выбираются по указанным выше правилам. Как известно, [Макаров, 1986], преобразование системы координат $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ в систему координат $O_ix_iz_i$ может быть осуществлено посредством следующих последовательно выполненных операций:

1) Поворот на угол Θ_i вокруг оси z_{i-1} до достижения параллельности осей x_{i-1} и x_i .

2) Перенос на величину s_i вдоль оси z_{i-1} до тех пор, пока оси x_{i-1} и x_i не совместятся.

3) Перенос на величину a_i вдоль оси x_{i-1} до совпадения начал координат O_i и O_{i-1} .

4) Поворот на угол α_i относительно x_i до совмещения всех координатных осей.

Преобразование системы координат $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ к $O_ix_iz_i$ определяется матрицей:

$$A_i = A_{\theta_i} A_{s_i} A_{\alpha_i} A_{a_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \sin\alpha_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(i) & | & r_i \\ \text{---} & | & - \\ 000 & | & 1 \end{bmatrix},$$

Для рассматриваемого манипулятора указанные матрицы имеют вид:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha(1) & r_1 \\ \hline --- & - \\ 000 & 1 \end{array} \right];$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha(2) & r_2 \\ \hline --- & - \\ 000 & 1 \end{array} \right];$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & 0 & -\sin q_3 & l_3 \sin q_3 \\ \sin q_3 & 0 & \cos q_3 & l_3 \cos q_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha(3) & r_3 \\ \hline --- & - \\ 000 & 1 \end{array} \right].$$

Введем в рассмотрение систему координат $O_i^0 x_i^0 y_i^0 z_i^0$, начало которой совпадает с центром масс звена i

$$A_{iu} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha(i) & r_{iu} \\ \hline --- & - \\ 000 & 1 \end{array} \right].$$

Векторы

$$r_{1u} = \left[0, 0, \frac{l_1}{2} \right]^T; \quad r_{2u} = \left[0, \frac{l_2}{2}, q_2 \right]^T; \quad r_{3u} = \left[-\frac{l_3}{2} \sin q_3, \frac{l_3}{2} \cos q_3, 0 \right]^T$$

определяют положение центров масс звеньев в связанной со звеном системе координат. Положение центра масс звена i и ориентация осей системы $O_i^0 x_i^0 y_i^0 z_i^0$ в неподвижной системе координат будут определяться матрицами A_{0iu} :

$$A_{01u} = A_{1u};$$

$$A_{02u} = A_1 A_{2u} = \begin{bmatrix} -\sin q_1 & 0 & \cos q_1 & -\frac{l_2}{2} \sin q_1 \\ \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & \frac{l_2}{2} \cos q_1 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \alpha(0,2) & r_{02u} \\ \hline --- & - \\ 000 & 1 \end{array} \right];$$

$$A_{03и} = A_1 A_2 A_{3и} = \begin{bmatrix} -\sin q_1 \cos q_3 - \cos q_1 & \sin q_1 \sin q_3 & -\frac{l_3}{2} \sin q_1 \sin q_3 - l_2 \sin q_1 \\ \cos q_1 \cos q_3 - \sin q_1 & -\cos q_1 \sin q_3 & -\frac{l_3}{2} \cos q_1 \sin q_3 + l_2 \cos q_1 \\ \sin q_3 & 0 & \cos q_3 & \frac{l_3}{2} \cos q_3 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(0,3) & | & r_{03и} \\ \text{---} & | & \text{---} \\ 000 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Исходя из этого можно определить линейные скорости центров масс звеньев в неподвижной системе координат, связанной с основанием:

$$v_{01и} = \dot{r}_{01и} = [0, 0, 0]^T; \quad v_{02и} = \dot{r}_{02и} = \left[-\frac{l_2}{2} \cos q_1 \dot{q}_1, -\frac{l_2}{2} \sin q_1 \dot{q}_1, \dot{q}_2 \right]^T;$$

$$v_{03и} = \dot{r}_{03и} = \begin{bmatrix} -\frac{l_3}{2} \cos q_1 \sin q_3 \dot{q}_1 + \frac{l_3}{2} \sin q_1 \cos q_3 \dot{q}_3 - l_2 \cos q_1 \dot{q}_1 \\ -\frac{l_3}{2} \sin q_1 \sin q_3 \dot{q}_1 - \frac{l_3}{2} \cos q_1 \cos q_3 \dot{q}_3 - l_2 \sin q_1 \dot{q}_1 \\ -\frac{l_3}{2} \sin q_3 \dot{q}_3 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}.$$

Для определения проекций вектора угловой скорости звена i на оси, связанной с ним системы координат, можно воспользоваться формулами [Макаров, 1986]:

$$\omega_{ix} = \alpha_{13}(0, i) \dot{\alpha}_{12}(0, i) + \alpha_{23}(0, i) \dot{\alpha}_{22}(0, i) + \alpha_{33}(0, i) \dot{\alpha}_{32}(0, i);$$

$$\omega_{iy} = \alpha_{11}(0, i) \dot{\alpha}_{31}(0, i) + \alpha_{21}(0, i) \dot{\alpha}_{23}(0, i) + \alpha_{31}(0, i) \dot{\alpha}_{33}(0, i);$$

$$\omega_{iz} = \alpha_{12}(0, i) \dot{\alpha}_{11}(0, i) + \alpha_{22}(0, i) \dot{\alpha}_{21}(0, i) + \alpha_{32}(0, i) \dot{\alpha}_{31}(0, i).$$

Имеем

$$\omega_{1x} = 0 \omega_{1y} = 0 \omega_{1z} = \dot{q}_1;$$

$$\omega_{2x} = 0 \omega_{2y} = \dot{q}_1 \omega_{2z} = 0;$$

$$\omega_{3x} = \sin q_3 \dot{q}_1 \omega_{3y} = -\dot{q}_3 \omega_{3z} = \cos q_3 \dot{q}_1.$$

Вычислив производные, находим составляющие вектора углового ускорения

$$\varepsilon_1 = [0, 0, \ddot{q}_1]^T; \quad \varepsilon_2 = [0, \ddot{q}_1, 0]^T; \quad \varepsilon_3 = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \sin q_3 + \dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos q_3 \\ -\ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_1 \cos q_3 - \dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin q_3 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом были получены основные кинематические соотношения для остальных видов манипуляторов. А именно, для манипулятора робота, структурная кинематическая схема которого изображена на рис. 2, имеем:

$$\begin{aligned} r_{1u} &= \left[0, 0, \frac{l_1}{2} \right]^T; \quad r_{2u} = \left[0, \frac{l_2}{2}, q_2 \right]^T; \\ r_{3u} &= \left[\frac{l_3}{2} \cos q_3, \frac{l_3}{2} \sin q_3, 0 \right]^T; \quad r_{02u} = \left[-\frac{l_2}{2} \sin q_1, \frac{l_2}{2} \cos q_1, q_2 \right]^T; \\ r_{03u} &= \left[-\frac{l_3}{2} \cos(q_1 + q_3) - l_2 \sin q_1, -\frac{l_3}{2} \sin(q_1 + q_3) + l_2 \cos q_1, q_2 \right]^T. \\ v_{01u} = \dot{r}_{01u} &= [0, 0, 0]^T; \\ v_{02u} = \dot{r}_{02u} &= \left[-\frac{l_2}{2} \cos q_1 \dot{q}_1, -\frac{l_2}{2} \sin q_1 \dot{q}_1, \dot{q}_2 \right]^T; \\ v_{03u} = \dot{r}_{03u} &= \begin{bmatrix} -\frac{l_3}{2} \cos(q_1 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_3) - l_2 \cos q_1 \dot{q}_1 \\ -\frac{l_3}{2} \sin(q_1 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_3) - l_2 \sin q_1 \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}. \\ \omega_{1x} &= 0, \quad \omega_{1y} = 0, \quad \omega_{1z} = \dot{q}_1; \\ \omega_{2x} &= 0, \quad \omega_{2y} = 0, \quad \omega_{2z} = \dot{q}_1; \\ \omega_{3x} &= 0, \quad \omega_{3y} = -(\dot{q}_1 + \dot{q}_3), \quad \omega_{3z} = 0. \end{aligned}$$

Для манипулятора робота, структурная кинематическая схема которого изображена на рис. 3, эти соотношения имеют вид:

$$r_{1u} = \left[0, 0, \frac{l_1}{2} \right]^T; \quad r_{2u} = [0, 0, q_2]^T;$$

$$\begin{aligned}
 r_{3и} &= \left[\frac{l_3}{2} \sin q_3, -\frac{l_3}{2} \cos q_3, 0 \right]^T; \\
 r_{02и} &= [-q_2 \sin q_1, q_2 \cos q_1, l_1]^T; \\
 r_{03и} &= \left[-\frac{l_3}{2} \sin q_1 \cos q_3 - q_2 \sin q_1, -\frac{l_3}{2} \cos q_1 \cos q_3 + q_2 \cos q_1, \frac{l_3}{2} \sin q_3 \right]^T; \\
 v_{01и} &= \dot{r}_{01и} = [0, 0, 0]^T; \\
 v_{02и} &= \dot{r}_{02и} = [-\dot{q}_2 \sin q_1 - q_2 \cos q_1 \dot{q}_1, \dot{q}_2 \cos q_1 - q_2 \sin q_1 \dot{q}_1, 0]^T; \\
 v_{03и} &= \dot{r}_{03и} = \begin{bmatrix} -\frac{l_3}{2} \cos q_1 \cos q_3 \dot{q}_1 + \frac{l_3}{2} \sin q_1 \sin q_3 \dot{q}_3 - \dot{q}_2 \sin q_1 - q_2 \cos q_1 \dot{q}_1 \\ \frac{l_3}{2} \sin q_1 \cos q_3 \dot{q}_1 + \frac{l_3}{2} \cos q_1 \sin q_3 \dot{q}_3 - \dot{q}_2 \sin q_1 - q_2 \cos q_1 \dot{q}_1 \\ \frac{l_3}{2} \cos q_3 \dot{q}_3 \end{bmatrix}; \\
 \omega_{1x} &= 0, \quad \omega_{1y} = -\dot{q}_1, \quad \omega_{1z} = 0; \\
 \omega_{2x} &= \dot{q}_1, \quad \omega_{2y} = 0, \quad \omega_{2z} = 0; \\
 \omega_{3x} &= \cos q_3 \dot{q}_1, \quad \omega_{3y} = \dot{q}_3, \quad \omega_{3z} = \sin q_3 \dot{q}_1.
 \end{aligned}$$

Полученные кинематические соотношения позволяют перейти к нахождению уравнений динамики, которые характеризуют связь положения, скорости и ускорения звеньев с управляющими и возмущающими силами и моментами. Рассматривая манипулятор как голономную механическую систему, имеющую конечное число степеней свободы, для описания его динамики можно использовать уравнения Лагранжа второго рода [Liao Fong-Yaun, Chern Ming-Yang, 1985; Ven, 1986].

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j; \quad Q_j = Q_{jD} + Q_{jB} + Q_{jF} - \text{обобщенные силы};$$

$$Q_{jD} = M_{jD} + M_{jC} - \text{обобщенные силы управляющих приводов};$$

$$Q_{jB} = Q'_{jB} + Q''_{jB} - \text{внешние обобщенные силы};$$

M_{jD} и M_{jC} – это моменты развиваемые двигателем, управляющим j -й обобщенной координатой и моменты вязкого и сухого трения. Как известно, [Макаров, 1986] внешние обобщенные силы можно вычислить по формулам:

$$Q'_{jB} = \sum_{i=j}^3 (\alpha_{31}(0, j-1) y_{j-1, iи} \alpha_{32}(0, j-1) x_{j-1, iи}) p_i;$$

$$Q''_{jB} = (\alpha_{31}(0, j-1) y_{j-1, 3} \alpha_{32}(0, j-1) x_{j-1, 3}) p_r,$$

где $x_{j-1,iu}$, $y_{j-1,iu}$, – компоненты вектора $r_{j-1,iu}$, определяющего положение центра масс звена i в системе координат $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$, $ax_{j-1,3}, y_{j-1,3}$ – компоненты вектора $r_{j-1,3}$, задающего положение схвата в системе координат $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$. Рассматривая исполнительный механизм манипулятора как систему трех твердых тел, имеем

$$T = \sum_{i=1}^3 T_i.$$

При вычислении кинетической энергии звена использовалась формула

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_{0iu}^2 + \frac{1}{2} \omega_i^T I_{0i}^0 \omega_i,$$

v_{0iu} – вектор скорости центра инерции звена i относительно неподвижной системы координат; ω_i – вектор угловой скорости звена i в связанной с ним системе координат; I_{0i}^0 – тензор инерции звена i в точке O_i^0 . Осевые моменты инерции звеньев заданной конфигурации являются известными константами. При нахождении уравнений динамики учитывались только инерционные свойства роторов электродвигателей путем добавления членов вида

$I_{\rho j} n_j^2 \ddot{q}_j$, где $I_{\rho j}$ – момент инерции ротора двигателя j ; n_j – передаточное отношение редуктора. С учетом изложенных выше допущений были получены уравнения динамики в следующем виде:

$$(I_{\rho 1} n_1^2 + a_1) \ddot{q}_1 + a_5 \dot{q}_1 \dot{q}_3 = -n_1 (M_{1D} + M_{1C})$$

$$(I_{\rho 2} n_2^2 + a_2) \ddot{q}_2 + \frac{1}{2} a_4 \ddot{q}_3 + \frac{1}{2} a_6 \dot{q}_3^2 = n_2 (M_{2D} + M_{2C})$$

$$(I_{\rho 3} n_3^2 + a_3) \ddot{q}_3 + \frac{1}{2} a_4 \ddot{q}_2 - \frac{1}{2} a_5 \dot{q}_1^2 = -n_3 (M_{3D} + M_{3C}) + \frac{l_3}{2} \sin q_3 (p_3 + 2p_c).$$

Коэффициенты полученных уравнений могут быть вычислены по формулам:

$$a_1 = I_{z1} + m_2 \left(\frac{l_2}{2} \right)^2 + I_{y2} + I_{x3} (\sin q_3)^2 + I_{z3} (\cos q_3)^2 - \\ - m_3 l_2 l_3 \sin q_3 + m_3 l_2^2 + m_3 \left(\frac{l_3}{2} \right)^2 (\sin q_3)^2;$$

$$a_2 = m_2 + m_3; \quad a_3 = m_3 \left(\frac{l_3}{2} \right)^2 + I_{y3}; \quad a_4 = -l_2^2 m_3 \sin q_3;$$

$$a_5 = -m_3 l_2 l_3 \cos q_3 + \left(I_{x3} - I_{z2} + m_3 \left(\frac{l_3}{2} \right)^2 \right) \sin 2q_3; \quad a_6 = -m_3 l_3 \cos q_3.$$

Аналогичным образом были найдены уравнения динамики для манипулятора, структурная кинематическая схема которого приведена на рис. 2.

$$\begin{aligned} (I_{\rho 1} n_1^2 + a_1) \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} a_4 \ddot{q}_3 + a_5 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \frac{1}{2} a_5 (\dot{q}_3)^2 &= -n_1 (M_{1D} + M_{1C}); \\ (I_{\rho 2} n_2^2 + a_2) \ddot{q}_2 &= n_2 (M_{2D} + M_{2C}); \\ (I_{\rho 3} n_3^2 + a_3) \ddot{q}_3 + \frac{1}{2} a_4 \ddot{q}_1 - \frac{1}{2} a_5 \dot{q}_1^2 &= n_3 (M_{3D} + M_{3C}). \end{aligned}$$

Коэффициенты найденных уравнений могут быть вычислены по формулам:

$$\begin{aligned} a_1 &= I_{z1} + m_2 \left(\frac{l_2}{4} \right)^2 + I_{z2} + I_{z3} (\sin q_3)^2 + m_3 \left(\frac{l_3}{2} \right)^2 - m_3 l_2 l_3 \cos q_3 + m_3 l_2^2; \\ a_2 &= m_2 + m_3; \quad a_3 = m_3 \left(\frac{l_3}{2} \right)^2 + I_{y3}; \quad a_4 = m_3 \left(\frac{l_3}{2} \right)^2 - m_3 l_2 l_3 \cos q_3 + 2I_{y3}; \\ a_5 &= -m_3 l_3 l_2 \sin q_3. \end{aligned}$$

Динамика манипулятора, структурная кинематическая схема которого изображена на рис. 3, описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} (I_{\rho 1} n_1^2 + a_1) \ddot{q}_1 + a_6 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_7 \dot{q}_1 \dot{q}_3 &= -n_1 (M_{1D} + M_{1C}); \\ (I_{\rho 2} n_2^2 + a_2) \ddot{q}_2 + \frac{1}{2} a_4 \ddot{q}_3 + \frac{1}{2} a_8 \dot{q}_3^2 - \frac{1}{2} a_6 \dot{q}_1^2 &= n_2 (M_{2D} + M_{2C}); \\ (I_{\rho 3} n_3^2 + a_3) \ddot{q}_3 + \frac{1}{2} a_4 \ddot{q}_2 - \frac{1}{2} a_7 \dot{q}_1^2 &= n_3 (M_{3D} + M_{3C}) - \frac{l_3}{2} \cos^2 q_3 (p_3 + 2p_e). \end{aligned}$$

Коэффициенты уравнений динамики определяются согласно формулам:

$$\begin{aligned} a_1 &= I_{y1} + m_2 (q_2)^2 + I_{x2} + I_{z3} (\sin q_3)^2 + \\ &+ \left(m_3 \left(\frac{l_3}{2} \right)^2 + I_{x3} \right) (\cos q_3)^2 - l_3 \sin q_3 + m_3 q_2^2; \\ a_2 &= m_2 + m_3; \quad a_3 = m_3 \left(\frac{l_3}{2} \right)^2 + I_{y3}; \quad a_4 = -m_3 l_2 l_3 \sin q_3; \\ a_6 &= (2m_2 + 2m_3) q_2; \quad a_7 = -l_3 \sin q_3 + \left(I_{z3} - I_{x3} - m_3 \left(\frac{l_3}{2} \right)^2 \right) \sin 2q_3; \\ a_8 &= -m_3 l_3 \cos q_3. \end{aligned}$$

В приведенных выше соотношениях использованы следующие обозначения. Величины q_j – представляют собой обобщенные координаты, определяющие конфигурацию захватного устройства и манипулятора робота; через $m_j, l_j, p_j, l_{xi}, l_{yi}, l_{zi}$ обозначены соответственно масса, вес и осевые моменты инерции звена i, p_r – вес груза в захватном устройстве.

Заключение. Таким образом, в результате произведенных расчетов получены основные кинематические соотношения и уравнения динамики трехзвенных манипуляторов роботов, имеющих вращательную, поступательную и вращательную степени подвижности в форме уравнений Лагранжа второго рода.

Библиографический список

Робототехника и гибкие автоматизированные производства / под ред. И.М. Макарова. М.: Высшая школа, 1986.

Вукобратович М., Стокич В. Управление манипуляционными роботами. М.: Наука, 1985.

Liao Fong-Yaun, Chern Ming-Yang. Robot manipulator dynamics computation on a VLSI array processor // SCS-85: Int. Conf. Supercomput. Syst. St. Petersburg .Fla. Dec. 16–20. 1985. Proc. Washington (D.C.). 1985.

Ven H.H. Aspects of dynamic models of robots // Journal A. 1986. Vol. 27, no. 1.

References

Robotics and flexible automated production. Under red. I.M. Makarova. M.: High school, 1986.

Vukobratovich M., Stokich V. Control of manipulation robots. M.: Science, 1985.

Liao Fong-Yaun, Chern Ming-Yang. Robot manipulator dynamics computation on a VLSI array processor. SCS-85: Int. Conf. Supercomput. Syst. St. Petersburg. Fla. Dec. 16–20. 1985. Proc. Washington (D.C.). 1985.

Ven H.H. Aspects of dynamic models of robots. *Journal A*, 1986, vol. 27, no. 1.

Материал поступил в редакцию 06.07.2019

Алексеева С.В. Математическое моделирование одного типа трехзвенного манипулятора робота // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2019. Вып. 229. С. 255–265. DOI: 10.21266/2079-4304.2019.229.255-265

Определение параметров и условий, при которых, при работе манипуляторов роботов, могут быть достигнуты поставленные критерии оптимальности, являются актуальной задачей. В связи с этим возникает задача

математического моделирования исполнительской системы манипуляционного робота. В статье рассматриваются манипуляторы, имеющие вращательную, поступательную и вращательную кинематические пары пятого класса. Приведены три возможные кинематические схемы для таких манипуляторов. Для описания движения манипуляционного робота вводятся обобщенные координаты, однозначно определяющие его конфигурацию. В качестве обобщенных координат были приняты углы относительных поворотов и линейные относительные смещения звеньев. С каждым звеном манипулятора и с неподвижным основанием была связана декартова прямоугольная система координат. Задача определения взаимного положения звеньев и их положение в инерциальном пространстве решалась на основе преобразования одной системы координат к другой. В результате были найдены основные кинематические соотношения, определяющие положение, скорость и ускорение центров масс звеньев в неподвижной системе координат, для манипуляторов роботов, имеющих одну поступательную и две вращательные степени подвижности. На основе этих соотношений была решена задача построения уравнений динамики в форме уравнений Лагранжа второго рода. Преимуществом такой формы записи является замкнутая форма выражений, определяющих динамику системы, что дает возможность правильно учесть действующие в системе внутренние силы. Для каждого из рассмотренных манипуляторов были получены системы трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающие их динамику. В связи с необходимостью оценки момента нагрузки, возникающей на валу управляющего привода, внешние обобщенные силы были приведены к соответствующей обобщенной координате.

Ключевые слова: трехзвенный манипулятор, кинематические соотношения, уравнения динамики.

Alekseeva S.V. Mathematical modeling of one type of three-link manipulator robot's. *Izvestia Sankt-Peterburgskoj Lesotehniceskoy Akademii*, 2019, is. 229, pp. 255–265 (in Russian with English summary). DOI: 10.21266/2079-4304.2019.229.255-265

Determination of parameters and conditions under which, when operating robot manipulators, the set optimality criteria can be achieved is an urgent task. In this regard, there is a problem of mathematical modeling of the Executive system of the manipulation robot. The article deals with manipulators having rotational, translational and rotational kinematic pairs of the fifth class. Given three possible kinematics for these manipulators. To describe the motion of the handling robot introduces the generalized coordinates that uniquely define its configuration as generalized coordinates were taken of the angles of relative rotations and a linear relative displacement of the links. A Cartesian rectangular coordinate system was connected to each link of the manipulator and to the fixed base. The problem of determining the

relative position of the links and their position in inertial space was solved on the basis of the transformation of one coordinate system to another. As a result, we found the basic kinematic relations that determine the position, speed and acceleration of the centers of mass of the links in a fixed coordinate system for robot manipulators with one translational and two rotational degrees of mobility. On the basis of these relations the problem of construction of equations of dynamics in the form of Lagrange equations of the second kind was solved. The advantage of this form of recording is the closed form of expressions that determine the dynamics of the system, which makes it possible to properly take into account the internal forces acting in the system. Systems of three nonlinear differential equations of the second order describing their dynamics were obtained for each of the considered manipulators. Due to the need to estimate the moment of load arising on the shaft of the control drive, the external generalized forces were reduced to the corresponding generalized coordinate.

Key word: three-link manipulator, kinematic relations, dynamic equations.

АЛЕКСЕЕВА Светлана Владимировна – доцент Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета имени С.М. Кирова, кандидат технических наук.

194021. Институтский пер., д.5, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: pum222@mail.ru

ALEKSEEVA Svetlana V. – PhD (Technical), associate professor St.Petersburg State Forest University.

194021. Institute per. 5. St. Petersburg, Russia. E-mail: pum222@mail.ru