

А.В. Лебедев, В.В. Кузьмичев

ПРОВЕРКА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗАВИСИМОСТИ ВЫСОТЫ ОТ ДИАМЕТРА НА ВЫСОТЕ ГРУДИ В БЕРЕЗОВЫХ ДРЕВОСТОЯХ

Введение. Точность определения высоты деревьев имеет важное значение как в лесохозяйственных работах, так и при проведении научных исследований. Диаметр на высоте груди и высота считаются основными таксационными показателями для определения объемов стволов и биомассы. В зависимости от диаметра и высоты стволов находятся физико-химические свойства древесины, например содержание в ней лигнина и целлюлозы, плотность [Kroon, 2008]. Кроме того, по графическим зависимостям высоты от диаметра проводится определение средней высоты, соответствующей среднему дереву в древостое.

При проведении таксационных работ, как правило, диаметр измеряется для всех деревьев на учетной площади, а высота – только для некоторых. Измерение диаметра деревьев является более экономичным и простым процессом с получением точного результата, чем измерение высоты. Однако для построения моделей необходимы репрезентативные выборки точных значений высот и диаметров на высоте груди.

Соотношение между высотами и диаметрами деревьев может отличаться от древостоя к древостою, что обусловлено отличием густоты, качества условий места произрастания. Иногда даже в пределах одного лесотаксационного выдела изменчивость может быть очень высокой [Calama and Montero, 2004]. Кроме того, соотношение между высотой и диаметром изменяется с возрастом древостоя [Curtis, 1967; Pretzsch, 2009; Хлюстов, Лебедев, 2017].

Высота обычно определяется с использованием конкретных моделей, где она является функцией от диаметра дерева на высоте груди:

$$h = f(d),$$

где h – высота, м; d – диаметр на высоте груди, см.

Наиболее простыми моделями зависимости высоты деревьев от диаметра на высоте груди являются двухпараметрические, и они находят широкое применение в лесотаксационных работах. Результаты исследования [El Mamoun et al., 2013] показывают, что двухпараметрические модели яв-

ляются предпочтительнее трехпараметрических, так как позволяют избежать переобучения на исходных данных. Двухпараметрические модели, в частности уравнение из [Näslund, 1929], послужили основой для разработки нелинейных моделей со смешанным эффектом для древостоев центральной части Чехии [Sharma, Vacek, Vacek, 2016]. Выбор только двухпараметрических моделей в данной работе обусловлен стремлением обеспечить сходимость в каждой выборке экспериментальных данных.

В начале для описания зависимости «высота – диаметр» использовались простые математические функции, такие как полиномиальные [Näslund, 1929; Assmann, 1943], дробно-полиномиальные [Korsuň, 1935; Michailoff, 1943] и экспоненциальные [Korf, 1939; Freese, 1964]. Большое количество местных уравнений было разработано и/или подтверждено и опубликовано в литературе [Nowak, 1990; Sharma, 2009; El Mamoun et al., 2013]. Анализу функций посвящены исследования [Schmidt, 1967; Kennel, 1972; Sharma, 2009] и др.

Цель исследования – по материалам измерения модельных деревьев в березовых древостоях из множества двухпараметрических моделей выбрать наиболее адекватную, которая передает зависимость между высотой деревьев и диаметром на высоте груди.

Методика исследования. Пробные площади были заложены в Лесной опытной даче Московского сельскохозяйственного института (в настоящее время – Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева) в период с 1905 по 1917 г. Площадь территории Лесной опытной дачи составляет 248,6 га. В 1887 г. площадь, занятая березняками составляла 42 га, далее снизилась в результате рубок до 26 га в 1935–1945 гг. и затем расширилась после распада естественных сосняков до 50 га в 1987–2009 гг. Запас возрастал с некоторым запаздыванием и составлял в 1915–1935 гг. около 7 тыс. м³, упал в 1955 г. до 3,9 тыс. м³, далее вслед за увеличением площади запас стал нарастать, составив в 1987 г. 13,3 тыс. м³. После урагана 1998 г. запас упал до 10,5 тыс. м³, и средний запас древесины составил в 2009 г. 210 м³·га⁻¹ [Дубенок, Кузьмичев, Лебедев, 2018, 2020].

Возраст древостоев, в которых проводился обмер модельных деревьев, составлял от 20 до 85 лет, средний диаметр – от 3 до 30 см, а средняя высота – от 6 до 27 м. На опытных участках измерялись от 35 до 153 деревьев, всего на 23 пробных площадях учтены 2201 дерево с диаметрами от 0,5 до 42,1 см и высотами от 2,0 до 28,7 м. Измерение диаметра на высоте груди проводилось у растущих деревьев от шейки корня. В молодняках измерение высот выполнялось мерной лентой от шейки корня с использованием лест-

ницы. В средневозрастных и приспевающих древостоях (лесные культуры) проводилась вырубка каждого второго ряда, а в спелых – сплошная. Как было принято в лесотаксационных исследованиях начала XX в. [Крюденер, 1911], при проведении рубки длина ствола определялась без учета пня.

Описательные статистики (средняя, среднееквадратическое отклонение, минимальное и максимальное значения, количество наблюдений) экспериментальных данных, использованных в исследовании, и коэффициенты корреляции Пирсона между высотой и диаметром приведены в табл. 1.

Таблица 1

Характеристика экспериментальных данных

Characterization of experimental materials

№ ПП	Диаметр				Высота				n	r
	mean	std	min	max	mean	std	min	max		
1	27,1	7,0	11,5	42,1	24,7	3,1	14,5	28,7	65	0,720
2	10,5	3,5	3,4	21,3	13,3	2,2	5,6	16,9	142	0,829
3	11,2	4,2	2,7	19,9	13,8	2,9	5,8	17,5	149	0,879
4	13,3	4,0	3,7	23,0	15,1	2,2	5,4	18,3	149	0,817
5	12,2	4,7	3,4	22,7	14,4	3,0	5,5	19,3	141	0,875
6	11,7	4,6	2,2	24,0	14,4	3,1	3,9	19,2	133	0,888
7	13,1	4,6	3,0	24,3	15,6	3,1	5,3	20,7	136	0,888
8	13,0	4,8	3,2	24,4	15,0	3,3	3,7	19,6	153	0,864
9	14,3	4,8	4,4	25,3	16,3	3,1	7,0	21,7	130	0,861
10	15,4	4,3	6,8	25,8	18,0	2,2	11,2	22,0	100	0,806
11	29,2	5,8	17,1	42,8	26,1	1,9	18,6	28,5	56	0,749
12	12,6	4,5	3,9	22,0	13,9	2,6	6,7	19,0	67	0,892
13	12,2	2,6	7,7	18,3	11,4	1,2	8,5	14,2	50	0,784
14	14,5	3,9	4,7	23,1	14,9	1,9	8,9	18,2	57	0,873
15	14,9	4,0	5,3	23,7	15,2	2,3	7,4	18,0	52	0,820
16	15,2	5,0	2,6	22,4	15,3	3,1	5,0	18,5	52	0,905
17	21,4	5,0	12,7	39,0	23,0	1,9	16,8	25,7	37	0,720
18	7,0	2,1	3,5	14,0	11,4	1,7	6,2	14,7	98	0,903
19	4,7	1,6	1,4	7,4	7,4	1,3	3,8	9,7	35	0,908
20	10,0	3,0	5,0	17,1	13,1	1,9	8,2	16,2	99	0,870
21	2,7	1,3	0,5	6,8	5,2	1,3	2,0	8,3	100	0,907
22	7,4	2,7	3,1	14,3	10,4	1,8	5,4	13,2	100	0,876
23	4,1	1,2	1,4	7,4	7,1	1,0	4,2	9,7	100	0,874

Примечания: mean – средняя арифметическая; std – среднееквадратическое отклонение; min – минимальное значение, max – максимальное значение; n – количество наблюдений; r – коэффициент корреляции Пирсона.

Методика анализа данных предполагала на первом этапе построение парных визуализаций зависимости высоты от диаметра и проверку выборок на наличие выбросов. В дальнейшем для каждой из пробных площадей проводилось определение параметров для 14 двухпараметрических моделей, наиболее часто встречающихся в литературных источниках, общий вид которых приведен в табл. 2.

Таблица 2

Двухпараметрические модели зависимости высоты деревьев от диаметра на высоте груди

Bi-parameter models of the dependence of tree height on diameter at breast height

№ модели	Модель	Источник
1	$h = 1,3 + b_1 DBH^{b_2}$	Huxley and Teissier [1936]
2	$h = 1,3 + \left(\frac{DBH}{b_1 + b_2 DBH} \right)^3$	Näslund [1929]
3	$h = 1,3 + \frac{b_1 DBH}{b_2 + DBH}$	Huang et al. [2000]
4	$h = 1,3 + b_1 \left(\frac{DBH}{1 + DBH} \right)^{b_2}$	Huang et al. [2000]
5	$h = 1,3 + b_1 \left(1 + \frac{1}{DBH} \right)^{b_2}$	Curtis [1967]
6	$h = 1,3 + \frac{b_1 DBH}{(1 + DBH)^{b_2}}$	Curtis [1967]
7	$h = 1,3 + b_1 (1 - \exp(-b_2 DBH))$	Meyer [1940]
8	$h = 1,3 + \exp\left(b_1 + \frac{b_2}{DBH + 1} \right)$	Wykoff et al. [1982]
9	$h = 1,3 + \frac{b_1 DBH}{(DBH + 1) + b_2 DBH}$	Bates and Watts [1980]
10	$h = 1,3 + b_1 DBH \exp(-b_2 DBH)$	Huang et al. [2000]
11	$h = 1,3 + \exp\left(b_1 + \frac{b_2}{DBH} \right)$	Staudhammer and LeMay [2000]
12	$h = 1,3 + b_1 \exp\left(\frac{b_2}{DBH} \right)$	Buford [1986]
13	$h = 1,3 + b_1 (\ln(1 + DBH))^{b_2}$	El Mamoun et al. [2013]
14	$h = 1,3 + \left(b_1 + \frac{b_2}{DBH} \right)^{-5}$	El Mamoun et al. [2013]

Примечания: h – высота, м; DBH – диаметр на высоте груди, см; b_1 и b_2 – параметры модели.

Параметры моделей вычислялись путем минимизации среднеквадратической ошибки. Используемый метод оптимизации в решении задачи – дифференциальная эволюция. Для каждого полученного уравнения рассчитывались следующие метрики, позволяющие судить о качестве модели:

- квадратный корень из среднеквадратической ошибки (RMSE)

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}},$$

- коэффициент детерминации (R^2)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2},$$

- информационный критерий Акаике (AIC)

$$AIC = 2k + n \ln \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n},$$

- информационный критерий Байеса (BIC)

$$BIC = k \ln n + n \ln \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}$$

где k – количество параметров модели (в нашем случае $k = 2$); n – количество наблюдений; y_i – фактическое значение; \hat{y}_i – предсказанное по модели значение.

Модель, для которой на большинстве выборок (пробных площадях) получены наибольшие значения коэффициента детерминации и наименьшие значения информационных критериев и среднеквадратической ошибки, признавалась лучшей. Обработка экспериментальных материалов проводилась с использованием Python 3.5 + NumPy 1.17.1 + SciPy 1.3.2.

Результаты исследования. В табл. 3 представлены итоговые усредненные оценки (через количество пробных площадей) качества моделей по всем выборкам. По комплексу метрик (RMSE, R^2 , AIC, BIC) худшее качество показали модели № 1 (средние значения RMSE = 1,043; R^2 = 0,774; AIC = 8,0; BIC = 195,4) и № 6 (средние значения RMSE = 1,021; R^2 = 0,774; AIC = 8,0; BIC = 195,4). Одно из лучших решений задачи показала модель № 10 (средние значения RMSE = 0,911; R^2 = 0,821; AIC = -19,1; BIC = 168,3), но функция имеет точку максимума, после которой становится убывающей. Поэтому использование этой модели для выравнивания высот от диаметров является не совсем корректным, так как, например, по

мнению [Подмаско, 1973] у кривой должна наблюдаться горизонтальная асимптота. Незначительно хуже оказались приводящие к одинаковому решению модели № 11 и 12 (средние значения $RMSE = 0,915$; $R^2 = 0,819$; $AIC = -19,4$; $BIC = 168,0$), № 14 (средние значения $RMSE = 0,918$; $R^2 = 0,818$; $AIC = -18,8$; $BIC = 168,6$), № 4 и 5 (средние значения $RMSE = 0,917$; $R^2 = 0,818$; $AIC = -18,8$; $BIC = 168,6$). Часто используемое уравнение из [Näslund, 1929] (модель № 2) также показало хорошую точность в выравнивании экспериментальных данных.

Таблица 3

Итоговые оценки качества моделей

Final assessments of model quality

№ мо- дели	RMSE			R ²			AIC			BIC		
	min	mean	max	min	mean	max	min	mean	max	min	mean	max
1	0,464	1,043	1,922	0,587	0,774	0,885	-149,7	8,0	120,1	20,9	195,4	422,1
2	0,376	0,921	1,705	0,604	0,817	0,924	-191,9	-17,9	79,8	4,1	169,5	380,2
3	0,405	0,954	1,762	0,602	0,806	0,918	-176,9	-10,1	92,7	16,6	177,3	394,7
4	0,378	0,917	1,687	0,605	0,818	0,922	-190,4	-18,8	79,5	5,6	168,6	377,8
5	0,378	0,917	1,687	0,605	0,818	0,922	-190,4	-18,8	79,5	5,6	168,6	377,8
6	0,427	1,021	1,902	0,589	0,782	0,897	-166,3	3,3	114,5	18,7	190,7	416,5
7	0,397	0,925	1,667	0,608	0,817	0,924	-180,8	-16,1	84,4	15,2	171,3	386,4
8	0,408	0,923	1,695	0,605	0,816	0,924	-173,4	-14,9	81,7	15,9	170,5	380,0
9	0,405	0,954	1,762	0,602	0,806	0,918	-176,9	-10,1	92,7	16,6	177,3	394,7
10	0,399	0,911	1,568	0,604	0,821	0,925	-179,8	-19,1	80,6	16,2	168,3	381,0
11	0,380	0,915	1,679	0,605	0,819	0,918	-189,3	-19,4	79,7	6,7	168,0	376,4
12	0,380	0,915	1,679	0,605	0,819	0,918	-189,3	-19,4	79,7	6,7	168,0	376,4
13	0,416	0,988	1,852	0,593	0,794	0,909	-171,6	-3,4	101,4	17,6	184,0	403,4
14	0,375	0,918	1,694	0,605	0,818	0,922	-192,0	-18,8	79,5	4,0	168,6	378,2

В табл. 4 приводятся значения параметров и метрик качества модели № 11, которая показывает одно из лучших решений. Значения $RMSE$ изменяются от 0,380 до 1,678, R^2 – от 0,605 до 0,918, AIC – от -189,3 до 79,7 и BIC – от 6,7 до 376,4. Для параметров модели характерна достаточно высокая изменчивость в зависимости от возрастной категории древостоя. Так, наименьшие значения параметра b_1 получены для молодых (пробная площадь 21, $b_1 = 2,005$), а наибольшие – для спелых (пробная площадь 11, $b_1 = 3,490$). Со старением древостоев (увеличением средних диаметра и высоты) происходит уменьшение параметра b_2 . Например, для пробной площади 21 $b_2 = -1,421$, а для пробной площади 11 $b_2 = -7,834$.

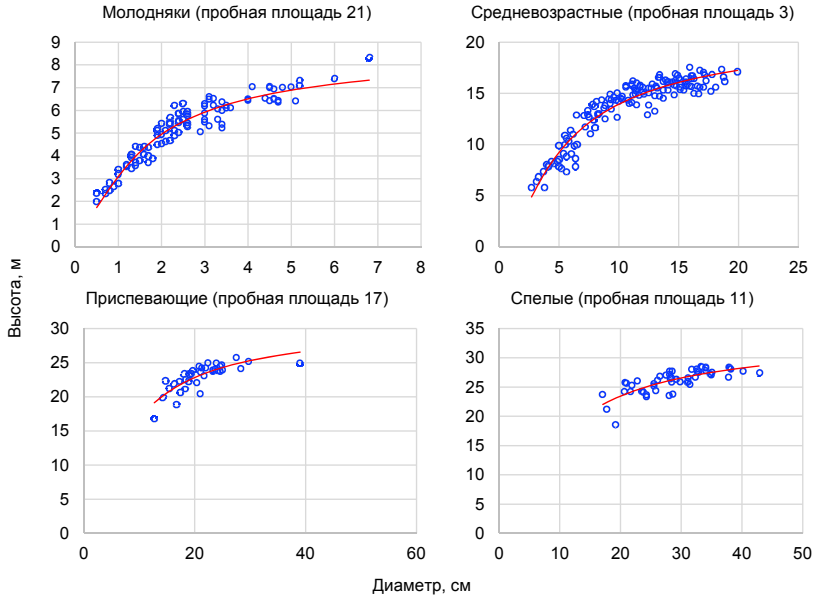
Таблица 4

Значения параметров и метрик качества модели № 11

Values of parameters and quality metrics of model № 11

№ ПП	Параметры		Метрики качества			
	b_1	b_2	RMSE	R^2	AIC	BIC
1	3,515	-9,266	1,679	0,750	60,1	184,1
2	2,943	-4,365	0,929	0,819	-18,1	259,9
3	3,003	-4,653	0,921	0,913	-38,7	253,3
4	2,985	-4,400	0,870	0,856	-45,5	246,5
5	3,035	-4,924	0,925	0,909	-20,4	255,6
6	3,047	-4,843	1,061	0,879	26,1	286,1
7	3,164	-5,971	1,094	0,879	28,9	294,9
8	3,112	-5,706	1,259	0,852	75,2	375,2
9	3,184	-6,146	1,338	0,815	81,9	335,9
10	3,173	-5,186	1,141	0,721	32,6	226,6
11	3,490	-7,834	1,184	0,609	24,4	130,4
12	2,940	-4,541	0,988	0,858	1,6	129,6
13	2,751	-5,149	0,703	0,660	-29,5	64,5
14	2,987	-5,067	0,709	0,858	-32,8	75,2
15	3,062	-5,967	0,996	0,814	2,6	100,6
16	3,019	-5,015	0,883	0,925	-11,9	86,1
17	3,397	-6,555	1,073	0,708	6,2	74,2
18	2,847	-3,492	0,563	0,895	-107,9	82,1
19	2,291	-2,031	0,459	0,877	-48,2	15,8
20	2,927	-4,294	0,775	0,839	-47,2	144,8
21	2,005	-1,421	0,380	0,916	-184,1	9,9
22	2,689	-3,156	0,626	0,888	-94,8	99,2
23	2,288	-2,065	0,496	0,781	-143,9	50,1

На рисунке показаны зависимости высоты от диаметра на высоте груди в молодняках (пробная площадь 21), средневозрастных (пробная площадь 3), приспевающих (пробная площадь 17) и спелых и перестойных (пробная площадь 11) древостоях. В процессе онтогенеза древостоев происходит изменение формы кривой: в молодняках она является более выпуклой, чем в спелых и перестойных. Кроме того, с увеличением возраста происходит смещение кривой в сторону больших диаметров и высот деревьев.



Зависимость высоты от диаметра на высоте груди
в древостоях разных групп возраста по модели № 11
Dependence of height on diameter at breast height in stands
of different age groups according to model № 11

Со статистической точки зрения полученные различия в качестве моделей не являются значимыми на 5%-м уровне. Сравнение средних по двухвыборочному t-тесту при различных дисперсиях при двухсторонней альтернативе для моделей № 11 и 12, которые показали одно из лучших решений, и модели № 1 с худшим решением показало, что для RMSE $t = 1,10$ (p -значение = 0,28), для R^2 $t = -0,56$ (p -значение = 0,57), для AIC $t = 1,37$ (p -значение = 0,17) и для BIC $t = 0,76$ (p -значение = 0,45). Между всеми остальными сравниваемыми парами моделей различия оказались также статистически не значимыми. Таким образом, выбор лучшей модели в некоторой степени можно считать субъективным.

Во многих исследованиях в качестве базовой двухпараметрической модели зависимости высоты от диаметра на высоте груди выбирается уравнение [Näslund, 1929], и оно характеризуется как наиболее гибкое [Kangas, Maltamo, 2002; Mehtätalo et al., 2015]. Результаты наших исследо-

ваний подтверждают целесообразность использования на практике данного уравнения. В то же время для древостоев естественного происхождения основных лесообразующих пород Судана [El Mamoun et al., 2013] выявлено, что выбор той или иной модели зависит также от древесной породы. В нашем случае показано, что в целом можно рекомендовать двухпараметрические модели № 11 и 14, при этом модель № 1 показала самые худшие значения метрик качества.

Вывод. Обоснованные в качестве лучших модели зависимости высоты от диаметра на высоте груди могут быть использованы на практике при выполнении лесохозяйственных и научно-исследовательских работ в березовых древостоях, произрастающих в центральных регионах европейской части России. Методика данного исследования позволяет повторить аналогичную работу для древесных пород и лесорастительных условий, для которых информация о характере связи высоты с таксационным диаметром является неполной или отсутствует.

Библиографический список

Дубенок Н.Н., Кузьмичев В.В., Лебедев А.В. Динамика лесного фонда Лесной опытной дачи РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева за 150 лет // Известия Тимирязевской сельскохозяйственной академии. 2018. № 4. С. 5–19. DOI: 10.26897/0021-342X–2018-4-5–19.

Дубенок Н.Н., Кузьмичев В.В., Лебедев А.В. Результаты экспериментальных работ за 150 лет в Лесной опытной дачи Тимирязевской академии / РГАУ-МСХА им. К.А. Тимирязева. М.: Наука, 2020. 382 с.

Крюденер А.А. Массовые таблицы и таблицы сбега осины Европейской России. Вып. 4. СПб., 1911. 86 с.

Подмаско Б.И. Инвентаризация лиственных лесов севера Дальнего Востока СССР методом камерального дешифрирования аэроснимков: автореф. дис. ... канд. с.-х. наук. М., 1973. 24 с.

Хлюстов В.К., Лебедев А.В. Товарно-денежный потенциал древостоев и оптимизация лесопользования: моног. Иркутск: Мегалит, 2017. 328 с.

Assmann E. Untersuchungen über die Höhenkurven von Fichtenbeständen // Allgemeine Forst und Jagdzeitung. 1943. No. 119. P. 77–88.

Calama R., Montero G. Interregional non-linear height-diameter model with random coefficients for Stone pine in Spain // Canadian Journal of Forest Research. 2004. No. 34. P. 150–163.

Curtis R.O. Height-diameter and height-diameter-age equations for second growth Douglas-fir // Forest Science. 1967. No. 13. P. 365–375.

El Mamoun H.O., El Zein A.I., El Mugira M.I. Modelling Height-Diameter Relationships of Selected Economically Important Natural Forests Species // *Journal of Forest Products & Industries*. 2013. № 2(1). P. 34–42.

Freese F. Linear regression methods for forest research. US Forest Service Research Paper, Forest Products Laboratory, Washington. 1964.

Kangas A., Maltamo M. Anticipating the variance of predicted stand volume and timber assortments with respect to stand characteristics and field measurements // *Silva Fennica*. 2002. No. 36. P. 799–811.

Kennel R. Buchendurchforstungsversuche in Bayern von 1870 bis 1970. Forschungsberichte no. 7, Forstliche Forschungsanstalt, München. 1972.

Korf V. Příspěvek k matematické definici vzrůstového zákona hmot lesních porostů // *Lesnická práce*. 1939. No. 18. P. 339–379.

Korsuň F. Život normálního porostu ve vzorcích // *Lesnická práce*. 1935. No. 14. P. 289–300.

Kroon J., Andersson B., Mullin T.J. Genetic variation in the diameter–height relationship in Scots pine (*Pinus sylvestris*) // *Canadian Journal of Forest Research*. 2008. No. 38(6). P. 1493–1503. DOI: 10.1139/X07-233.

Mehtätalo L., de-Miguel S., Gregoire T.G. Modeling height-diameter curves for prediction // *Canadian Journal of Forest Research*. 2015. No. 45. P. 826–837.

Michailoff I. Zahlenmässiges Verfahren für die Ausführung der Bestandeshöhenkurven // *Forstwissenschaftliches Centralblatt – Tharandter Forstliches Jahrbuch*. 1943. No. 6. P. 273–279.

Näslund M. Antalet provträd och höjdkurvans noggrannhet // *Meddelanden fran Statens Skogsforskningsinstitut*. 1929. No. 25. P. 93–170.

Nowak D.J. Height-diameter relations of Maple street trees // *Journal of Arboriculture*. 1990. No. 16(9). P. 231–235.

Pretzsch H. Forest Dynamics, Growth and Yield. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. 2009. Pretzsch H. Forest Dynamics, Growth and Yield. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. 2009. DOI: 10.1007/978-3-540-88307-4

Schmidt A. Der rechnerische Ausgleich von Bestandeshöhenkurven // *Forstwissenschaftliches Centralblatt*. 1967. No. 6(86). P. 370–382.

Sharma R.P. Modelling height-diameter relationship for Chir pine trees // *Banko Janakari*. 2009. No. 2(19). P. 3–9. DOI: 10.3126/banko.v19i2.2978.

Sharma R.P., Vacek Z., Vacek S. Nonlinear mixed effect height-diameter model for mixed species forests in the central part of the Czech Republic // *Journal of Forest Science*. 2017. No. 10. P. 470–484. DOI: 10.17221/41/2016-JFS.

References

Dubenok N.N., Kuzmichev V.V., Lebedev A.V. Forest area dynamics of the Forest experimental district of Russian Timiryazev State Agrarian University over a period of 150 years. *Izvestiya of Timiryazev Agricultural Academy*, 2018, no. 4, pp. 5–19. DOI: 10.26897/0021-342X–2018-4-5–19.

Dubenok N.N., Kuzmichev V.V., Lebedev A.V. The results of experimental work over 150 years in the Forest experimental district of the Timiryazev Academy. RSAU-MTAA. Moscow: Nauka, 2020. 382 p.

Krudener A.A. Mass tables and aspen escape tables of European Russia. Vol. 4. St. Petersburg: Printing house of the St. Petersburg Office of Departments, 1911. 86 p.

Podmasko B.I. Inventory of larch forests of the north of the Far East of the USSR by the method of desk interpretation of aerial photographs: Abstract of dissertation PhD (Agriculture). Moscow, 1973. 24 p.

Hlustov V.K., Lebedev A.V. Monetary potential of forest stands and optimization of forest use: Monography. Irkutsk: Megaprint, 2017. 328 p.

Assmann E. Untersuchungen über die Höhenkurven von Fichtenbeständen. *Allgemeine Forst und Jagdzeitung*, 1943, no. 119, pp. 77–88.

Calama R., Montero G. Interregional non-linear height-diameter model with random coefficients for Stone pine in Spain. *Canadian Journal of Forest Research*, 2004, no. 34, pp. 150–163.

Curtis R.O. Height-diameter and height-diameter-age equations for second growth Douglas-fir. *Forest Science*, 1967, no. 13, pp. 365–375.

El Mamoun H.O., El Zein A.I., El Mugira M.I. Modelling Height-Diameter Relationships of Selected Economically Important Natural Forests Species. *Journal of Forest Products & Industries*, 2013, no. 2(1), pp. 34–42.

Freese F. Linear regression methods for forest research. US Forest Service Research Paper, Forest Products Laboratory, Washington. 1964.

Kangas A., Maltamo M. Anticipating the variance of predicted stand volume and timber assortments with respect to stand characteristics and field measurements, *Silva Fennica*, 2002, no. 36, pp. 799–811.

Kennel R. Buchendurchforstungsversuche in Bayern von 1870 bis 1970. Forschungsberichte no. 7, Forstliche Forschungsanstalt, München. 1972.

Korf V. Příspěvek k matematické definici vzrůstového zákona hmot lesních porostů. *Lesnická práce*, 1939, no. 18, pp. 339–379.

Korsuň F. Život normálního porostu ve vzorcích. *Lesnická práce*, 1935, no. 14, pp. 289–300.

Kroon J., Andersson B., Mullin T.J. Genetic variation in the diameter–height relationship in Scots pine (*Pinus sylvestris*). *Canadian Journal of Forest Research*, 2008, no. 38(6), pp. 1493–1503. DOI: 10.1139/X07-233.

Mehtätalo L., de-Miguel S., Gregoire T.G. Modeling height-diameter curves for prediction. *Canadian Journal of Forest Research*, 2015, no. 45, pp. 826–837.

Michailoff I. Zahlenmässiges Verfahren für die Ausführung der Bestandeshöhenkurven. *Forstwissenschaftliches Centralblatt – Tharandter Forstliches Jahrbuch*, 1943, no. 6, pp. 273–279.

Näslund M. Antalet provträäd och höjdkurvans noggrannhet. *Meddelanden fran Statens Skogsforskningsinstitut*, 1929, no. 25, pp. 93–170.

Nowak D.J. Height-diameter relations of Maple street trees. *Journal of Arboriculture*, 1990, no. 16(9), pp. 231–235.

Pretzsch H. Forest Dynamics, Growth and Yield. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. 2009. Pretzsch H. Forest Dynamics, Growth and Yield. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. 2009. DOI: 10.1007/978-3-540-88307-4

Schmidt A. Der rechnerische Ausgleich von Bestandeshöhenkurven. *Forstwissenschaftliches Centralblatt*, 1967, no. 6(86), pp. 370–382.

Sharma R.P. Modelling height-diameter relationship for Chir pine trees. *Banko Janakari*, 2009, no. 2(19), pp. 3–9. DOI: 10.3126/banko.v19i2.2978.

Sharma R.P., Vacek Z., Vacek S. Nonlinear mixed effect height-diameter model for mixed species forests in the central part of the Czech Republic. *Journal of Forest Science*, 2017, no. 10, pp. 470–484. DOI: 10.17221/41/2016-JFS.

Материал поступил в редакцию 28.02.2020

Лебедев А.В., Кузьмичев В.В. Проверка двухпараметрических моделей зависимости высоты от диаметра на высоте груди в березовых древостоях // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2020. Вып. 230. С. 100–113. DOI: 10.21266/2079-4304.2020.230.100-113

Важное значение как в лесохозяйственных работах, так и при проведении научных исследований имеет точность определения высоты деревьев. Высота обычно определяется с использованием конкретных моделей, где она является функцией от диаметра дерева на высоте груди. Наиболее простыми моделями зависимости высоты деревьев от диаметра на высоте груди являются двухпараметрические, и они находят широкое применение в лесотаксационных работах. На материалах 23 пробных площадей с измерением модельных деревьев, заложенных в березовых древостоях Лесной опытной дачи Тимирязевской сельскохозяйственной академии, проводилось определение параметров для 14 двухпараметрических моделей, наиболее часто встречающихся в литературных источниках. Параметры моделей вычислялись путем минимизации среднеквадратической ошибки. Качество моделей оценивалось по следующим метрикам: квадратный корень из среднеквадратической ошибки, коэффициент детерминации, информационный критерий Акаике, информационный критерий Байеса. Полученные результаты подтвердили целесообразность использования на практике ряда уравнений, которые среди двухпараметрических моделей показывают приемлемое качество. Результаты анализа данных показывают, что со статистической точки зрения полученные различия в качестве моделей не являются значимыми на 5%-м уровне (*t*-тест). Обоснованные в качестве лучших модели зависимости высоты от диаметра на высоте груди могут быть использованы на практике при выполнении лесохозяйственных и научно-исследовательских работ в березовых древостоях, произрастающих в центральных

регионах европейской части России. Методика проведенного исследования позволяет повторить аналогичную работу для древесных пород и лесорастительных условий, для которых информация о характере связи высоты с таксационным диаметром является неполной или отсутствует.

Ключевые слова: береза, двухпараметрическая модель, отбор моделей, диаметр на высоте груди, высота.

Lebedev A.V., Kuzmichev V.V. Verification of bi-parameter models of dependence diameter on breast height in birch stands. *Izvestia Sankt-Peterburgskoj Lesotehniceskoi Akademii*, 2020, is. 230, pp. 100–113 (in Russian with English summary). DOI: 10.21266/2079-4304.2020.230.100-113

The accuracy of determining the height of trees is important both in forestry and in scientific research. Height is usually determined using specific models, where it is a function of the diameter at breast height. The simplest models of the dependence of tree height on diameter at breast height are two-parameter, and they are widely used in forest taxation researches. On the materials of 23 sample plots with the measurement of model trees laid in birch stands of the Forest Experimental District of the Timiryazev Agricultural Academy, the parameters were determined for the 14 bi-parameter models that are most often found in literary sources. Model parameters were calculated by minimizing the standard error. The quality of the models was evaluated by the following metrics: the square root of the standard error, the coefficient of determination, the Akaike information criterion, the Bayes information criterion. The obtained results confirmed the feasibility of using in practice several equations, which among the bi-parameter models show acceptable quality. The results of data analysis show that, from a statistical point of view, the differences obtained in the quality of models are not significant at the 5 % level (t-test). Substantiated as the best models of the dependence of height on diameter at breast height can be used in practice when performing forestry and research work in birch stands growing in the central regions of the European part of Russia. The methodology of the study allows you to repeat the same work for tree species and forest conditions, for which information about the nature of the relationship of height with the diameter at breast height is incomplete or absent.

Keywords: birch, bi-parameter model, selection of models, diameter at breast height, height.

ЛЕБЕДЕВ Александр Вячеславович – старший преподаватель кафедры сельскохозяйственных мелиораций, лесоводства и землеустройства Российского государственного аграрного университета – МСХА имени К.А. Тимирязева, кандидат сельскохозяйственных наук. SPIN-код: 5789-5540. ORCID: 0000-0002-8939-942X.

127550, Тимирязевская ул., д. 49, г. Москва, Россия. E-mail: avl1993@mail.ru

LEBEDEV Aleksandr V. – PhD (Agriculture), lecturer of the department of Agricultural Reclamation, Forestry and Land Management at Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy. SPIN-code: 5789-5540. ORCID: 0000-0002-8939-942X.

127550. Timiryazevskaya str. 49. Moscow. Russia. E-mail: avl1993@mail.ru

КУЗЬМИЧЕВ Валерий Васильевич – заведующий лабораторией кафедры сельскохозяйственных мелиораций, лесоводства и землеустройства Российского государственного аграрного университета – МСХА имени К.А. Тимирязева, доктор биологических наук, профессор.

127550, Тимирязевская ул., д. 49, г. Москва, Россия.

KUZMICHIEV Valery V. – DSc (Biology), professor, head of laboratory of the department of Agricultural Reclamation, Forestry and Land Management at Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy.

127550. Timiryazevskaya str. 49. Moscow. Russia.