

**Ю.Н. Власов, Е.В. Нестерова, Е.Г. Хитров**

**ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ИЗМЕНЕНИЯ  
ФРАКЦИОННОГО СОСТАВА  
ИЗМЕЛЬЧАЕМОГО ДРЕВЕСНОГО СЫРЬЯ**

*Введение.* Кусковые отходы лесопереработки и кора используются для производства товарной продукции, например плитных материалов, мульчи, топливных брикетов и пеллет [Бастриков, 2018a; Гомонай, 2006; Мюллер, 2015; Чибирев, 2018; Hodolic, 2007; Holm, 2006; Nilsson, 2011]. Обязательной операцией, присутствующей в большинстве технологических процессов производства продукции из отходов, является измельчение [Бастриков, 2018a; Rhen, 2007; Samuelsson, 2009]. Известные научные работы, затрагивающие вопросы измельчения древесных материалов, относятся, в основном, к производству щепы [Бастриков, 2018a]. Также существуют исследования, посвященные экспериментальному изучению энергоемкости измельчения древесины и коры [Бастриков, 2016, 2017, 2018b; Ефимова, 2013; Rabier, 2006]. Сравнительно меньше изучены вопросы кинетики измельчения древесных материалов, имеющие прямое отношение к производительности оборудования для измельчения при регулировании фракционного состава продукта дробления. В технике в целом при изучении кинетики измельчения материалов пользуются математическими моделями в виде интегро-дифференциальных уравнений, решение которых трудоемко и не всегда приводит к получению наглядных результатов [Бадоев, 2012; Шувалов, 2009; Racz, 2016].

Цель данной статьи – разработать математическую модель, раскрывающую кинетику изменения фракционного состава измельчаемых древесных материалов, позволяющую на практике проводить оценку фракционного состава обрабатываемого сырья во времени.

*Методика исследования* – математический анализ, численные методы решения дифференциальных уравнений и обработки расчетных данных.

Представим измельчение как многостадийный процесс, при котором фракции материала (узкие классы) под воздействием рабочего органа машины-измельчителя претерпевают превращения, происходящие как после-

довательно, так и параллельно, причем, скорости превращений и доли вновь образованных узких классов материала определяются исходными размерами измельчаемых фракций и параметрами рабочего органа измельчителя. В зависимости от принятой технологии, процесс измельчения может быть как циклическим, так и непрерывным, возможна подача дополнительного сырья и удаление узких классов из установки. Запишем в общем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 \xrightarrow{k_1} (\psi_{1,1} - 1)F_1 + \psi_{1,2}F_2 + \psi_{1,3}F_3 + \psi_{1,4}F_4 + \dots + \psi_{1,n}F_n. \\ F_2 \xrightarrow{k_2} (\psi_{2,2} - 1)F_2 + \psi_{2,3}F_3 + \psi_{2,4}F_4 + \dots + \psi_{2,n}F_n. \\ F_3 \xrightarrow{k_3} (\psi_{3,3} - 1)F_3 + \psi_{3,4}F_4 + \dots + \psi_{3,n}F_n. \\ \dots \\ F_n \xrightarrow{k_n} (\psi_{n,n} - 1)F_n. \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $F_i$  – узкие классы, начиная с самого крупного;  $k_j$  – коэффициенты пропорциональности в уравнениях скорости измельчения узких классов;  $\psi_{j,i}$  – доля  $i$ -го узкого класса, образующегося при измельчении  $j$ -го.

Наиболее крупному узкому классу соответствует индекс  $j = 1$ , наиболее мелкому –  $n$ . Построчные суммы коэффициентов  $\psi_{j,i}$  отражают баланс материала в установке. При условии  $\psi_{j=i} = \sum_{i=j+1}^n \psi_{j,i}$  узкий класс не удаляется из

установки, несоблюдение равенства означает поступление  $j$ -го класса в установку в процессе измельчения ( $\psi_{j=i} > \sum_{i=j+1}^n \psi_{j,i}$ ) или же его сдавливание в про-

цессе измельчения ( $\psi_{j=i} < \sum_{i=j+1}^n \psi_{j,i}$ ). Коэффициенты  $\psi_{j,i}$  можем связать с веро-

ятностями образования классов при измельчении более крупного, либо с вероятностью того, что при контакте рабочего органа с частицей разрушения ее не произойдет ( $\psi_{j=i} > -1$ ). Отсутствие в записи коэффициентов  $\psi_{j,i}$  с  $j > i$  означает невозможность перехода более мелких классов в более крупные.

Скорость измельчения  $j$ -го класса свяжем с его долей в объеме либо массе всего измельчаемого материала:

$$S_j = \frac{d\omega_j}{dt} = k_j \omega_j, \quad (2)$$

где  $t$  – время;  $\omega_j$  – доля  $j$ -го класса.

В общем случае можем принять произвольную зависимость  $S_j(\omega_j)$ , не ограничиваясь линейным выражением, причем, общая структура математической модели и ход вычислений не изменятся.

Поскольку скорость изменения доли определенной фракции в измельчаемом материале складывается из скоростей поступления и расхода этой фракции по отдельным ступеням процесса измельчения, запишем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_1}{dt} = k_1(\psi_{1,1} - 1)\omega_1, \\ \frac{d\omega_2}{dt} = k_2(\psi_{2,2} - 1)\omega_2 + k_1\psi_{1,2}\omega_1, \\ \frac{d\omega_3}{dt} = k_3(\psi_{3,3} - 1)\omega_3 + k_1\psi_{1,3}\omega_1 + k_2\psi_{2,3}\omega_2, \\ \dots \\ \frac{d\omega_n}{dt} = k_n(\psi_{n,n} - 1)\omega_n + k_1\psi_{1,n}\omega_1 + k_2\psi_{2,n}\omega_2 + \dots + k_{n-1}\psi_{n-1,n}\omega_{n-1}, \end{array} \right. \quad (3)$$

при начальных условиях  $\omega_1(0) = \omega_1^{(0)}$ ,  $\omega_2(0) = \omega_2^{(0)}$ , ...,  $\omega_n(0) = \omega_n^{(0)}$  (задаются как исходные данные).

Система дифференциальных уравнений (3) в общем виде описывает превращения узких классов при измельчении, причем, коэффициенты  $\psi$  и  $k$  позволяют учесть произвольный вид функций скоростей измельчения фракций и выхода продуктов измельчения. По сути своей система уравнений (3) является альтернативой интегро-дифференциальному уравнению балансовой модели измельчения. Принципиально важно, что численное решение системы дифференциальных уравнений (3) не представляет сложности при использовании специальных математических программ, реализующих вычисления при помощи команд высокого уровня; решение же интегро-дифференциального уравнения [Королев, 2012] требует составления отдельной многоступенчатой процедуры, например при реализации метода замены интеграла квадратурными суммами.

Оценим значения параметров математической модели на примере измельчения коры. Для этого обратимся к экспериментальным данным [Мардер, 1967], представленным в табл. 1.

Наиболее крупная фракция, на сите 15 мм, на протяжении всего процесса измельчения расходуется с образованием более мелких, при этом концентрация фракции на сите 10 мм вначале увеличивается, а затем уменьшается, более мелкие фракции накапливаются на протяжении всего процесса измельчения. Это обстоятельство свидетельствует о различной скорости измельчения фракций.

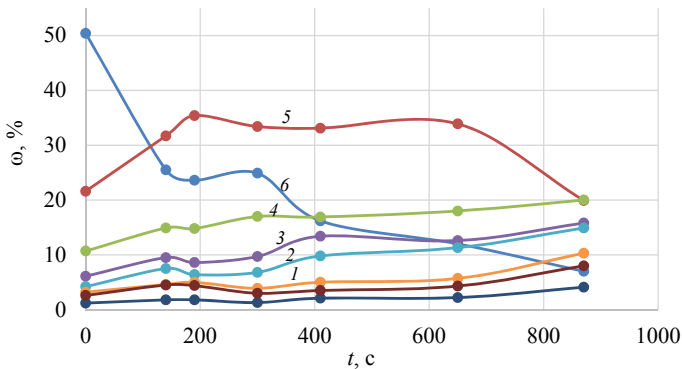
Таблица 1

**Результаты экспериментов по измельчению коры с использованием роторной корорубки КР-1203**

**Results of experiments on shredding debarking waste using a rotary casing KR-1203**

Сито	Остаток на сите, %						
	0 с	140 с	190 с	300 с	410 с	650 с	870 с
15 мм	50,4	25,5	23,6	24,9	16,2	12	7
10 мм	21,6	31,7	35,4	33,4	33,1	33,9	19,9
7 мм	10,7	14,9	14,8	17	16,9	18	20
5 мм	6,1	9,5	8,6	9,7	13,4	12,6	15,8
3 мм	4,2	7,5	6,4	6,8	9,8	11,3	14,9
2 мм	3,2	4,6	5	3,9	5	5,7	10,3
1 мм	1,2	1,8	1,8	1,3	2,1	2,2	4,1
Поддон	2,6	4,5	4,4	3	3,5	4,3	8

Представим табличные данные графически (рис. 1).



*Рис. 1.* Результаты экспериментов по измельчению коры с использованием роторной корорубки КР-1203  
Измельчение коры на сите 1 – 2 мм, 2 – 3 мм, 3 – 5 мм, 4 – 7 мм, 5 – 10 мм, 6 – 15 мм

*Fig. 1.* Results of experiments on shredding debarking waste using a rotary casing KR-1203

Для дальнейшего анализа примем соответствие остатков на ситах и линейных размеров частиц  $d$  в соответствии с табл. 2.

Таблица 2

**Соответствие остатков на ситах и линейных размеров частиц**

**Correspondence between sieve residue and linear particle size**

Сито	Поддон	1 мм	2 мм	3 мм	5 мм	7 мм	10 мм	15 мм
Обозн.	8	7	6	5	4	3	2	1
$d$ , мм	0,5	1,5	2,5	4	6	8,5	12,5	20

Зададимся значениями коэффициентов выхода узких классов  $\psi$ . В науке о процессах и аппаратах химической технологии при изучении измельчения органических материалов при единичном воздействии принято описывать распределение частиц размером  $d$ , образующихся при дроблении более крупных кусков материала размером  $d_0$ , следующим уравнением [Кафаров, 1985]:

$$\omega = 2d / d_0^2. \tag{4}$$

Например, при дроблении материала крупностью  $d_0 = 20$  мм распределение получающихся частиц будем иметь вид графика, представленного на рис. 2.

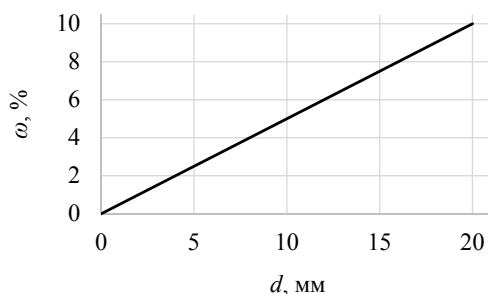


Рис. 2. Распределение измельченных частиц по линейным размерам при дроблении материала крупностью  $d_0 = 20$  мм, уравнение (4)

Fig. 2. Distribution of shredded particles on linear sizes at shredding of material with size  $d_0 = 20$  mm, equation (4)

Применительно к рассматриваемому примеру с помощью формулы (4) и таблицы 2, нормируя по интервалам линейных размеров классов, получим для выходов узких классов в зависимости от измельчаемой фракции распределение, представленное в табл. 3.

Таблица 3

**Выход узких классов в зависимости от измельчаемой фракции**

**Output of particle fractions depending on the shredded fraction**

Узкий класс (i)	Измельчаемая фракция (j)							
	15 мм	10 мм	7 мм	5 мм	3 мм	2 мм	1 мм	Поддон
Поддон (8)	0,9	1,4	2,2	3,4	5,9	11,1	25,0	100,0
Сито 1 мм (7)	2,7	4,2	6,5	10,3	17,6	33,3	75,0	–
2 мм (6)	4,5	7,0	10,9	17,2	29,4	55,6	–	–
3 мм (5)	7,2	11,3	17,4	27,6	47,1	–	–	–
5 мм (4)	10,8	16,9	26,1	41,4	–	–	–	–
7 мм (3)	15,3	23,9	37,0	–	–	–	–	–
10 мм (2)	22,5	35,2	–	–	–	–	–	–
15 мм (1)	36,0	–	–	–	–	–	–	–

Например, при измельчении фракции на сите 15 мм 36 % частиц не будут разрушены при единичном воздействии рабочего органа, 22,5 % частиц перейдут на сито 10 мм, 15,3 % – на сито 7 мм, 10,8 % – на сито 5 мм, 7,2 % – на сито 3 мм, 4,5 % – на сито 2 мм, 2,7 % – на сито 1 мм, 0,9 % частиц осядут на поддоне.

Воспользуемся двумя первыми дифференциальными уравнениями изменения доли фракций на сите 15 мм ( $\omega_1$ ) и 10 мм ( $\omega_2$ ) математической модели (3):

$$\begin{cases} \frac{d\omega_1}{dt} = k_1(\psi_{1,1} - 1)\omega_1, \\ \frac{d\omega_2}{dt} = k_2(\psi_{2,2} - 1)\omega_2 + k_1\psi_{1,2}\omega_1. \end{cases} \quad (5)$$

При начальных условиях  $\omega_1(0) = \omega_1^{(0)}$ ,  $\omega_2(0) = \omega_2^{(0)}$  получим решение:

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_1^{(0)} \exp(k_1\psi_{1,1}t - k_1t), \\ \omega_2 = \frac{k_1\psi_{1,2}\omega_1^{(0)} \exp(k_1\psi_{1,1}t - k_1t - k_2\psi_{2,2}t + k_2t)}{k_1\psi_{1,1} - k_2\psi_{2,2} - k_1 + k_2} \exp(k_2\psi_{2,2}t - k_2t), \\ - \frac{k_1\psi_{1,2}\omega_1^{(0)} - k_1\psi_{1,1}\omega_2^{(0)} + k_2\psi_{2,2}\omega_2^{(0)} + k_1\omega_2^{(0)} - k_1\omega_2^{(0)}}{k_1\psi_{1,1} - k_2\psi_{2,2} - k_1 + k_2} \exp(k_2\psi_{2,2}t - k_2t). \end{cases} \quad (6)$$

Далее подставим значения  $\omega_j^{(0)}$ ,  $\omega_j$  при  $t = 870$  с,  $\psi_{j,i}$  по табл. 1, 3 и решим систему уравнений относительно  $k_1$ ,  $k_2$ . В результате получим:  $k_1 = 0,0035$  и  $k_2 = 0,0013$ . Решение повторим, дополнив систему (6) уравнением для  $\omega_3$ ; определим  $k_3$ . Далее последовательно определим коэффициенты с  $k_4$  по  $k_8$  аналогичным образом. Отметим, что во всех случаях система дифференциальных уравнений имеет аналитическое решение, однако выражения для  $\omega_j$  громоздки, поэтому в тексте статьи их не приводим.

Результаты вычисления коэффициентов  $k_j$  для различных фракций измельчаемой коры представлены в табл. 4.

Таблица 4

**Коэффициенты пропорциональности в уравнениях кинетики измельчения различных фракций коры**

**Proportionality coefficients in equations of kinetics of shredding of different debarking waste fractions**

Сито	Поддон	1 мм	2 мм	3 мм	5 мм	7 мм	10 мм	15 мм
$j$	8	7	6	5	4	3	2	1
$d_j$ , мм	0,5	1,5	2,5	4	6	8,5	12,5	20
$k$	$4,67 \cdot 10^{-6}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$	$8,2 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$7,7 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$

Результаты сопоставления полученных значений коэффициентов  $k_j$  с линейными размерами узких классов  $d_j$  по табл. 2 представлены на рис. 3.

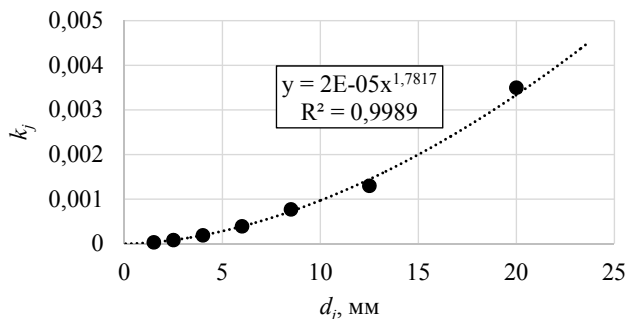


Рис. 3. Коэффициент пропорциональности в уравнении скорости измельчения узкого класса коры в зависимости от линейного размера узкого класса

Fig. 3. Proportionality coefficient in shredding velocity equation for a particle fraction class of bark as a function of the linear size of the class

Обработка расчетных данных показывает, что функция коэффициента пропорциональности в уравнении скорости измельчения узкого класса материала в зависимости от линейного размера практически точно описывается степенным уравнением

$$k_j = \lambda d_j^{1,78}, \quad (7)$$

причем  $\lambda$  введем как коэффициент, зависящий от параметров работы установки, определяющих число соударений частиц материала с рабочим органом за единицу времени:

$$\lambda = \lambda_0 n v_1 v_2, \quad (8)$$

где  $\lambda_0$  – поправочный коэффициент, учитывающий конструкцию машины-измельчителя;  $v_1$  – коэффициент, учитывающий форму рабочего органа измельчителя;  $v_2$  – доля объема, занятая измельчаемым сырьем.

В рассматриваемом случае  $\lambda = 16,047 \cdot 10^{-6}$ .

Результаты решения системы дифференциальных уравнений для измельчения коры при принятых исходных данных, полученные в программе *Maple 2018*, проиллюстрированы на рис. 4.

Сопоставление графиков на рис. 1, 4 показывает, что предложенная дифференциальная модель изменения фракционного состава материала при принятых предположениях к расчету ее параметров качественно и количественно описывает экспериментальные данные с высокой точностью.

Средневзвешенная крупность измельчаемой коры изменяется по времени в соответствии с графиком на рис. 5.

Аналогичные построения после экспериментальной проверки можем выполнить для случаев измельчения древесины, а также при изучении работы оборудования с молотковым рабочим органом при варьировании частоты вращения рабочего органа измельчителя.

Отметим, что система уравнений (3) описывает не только измельчения в замкнутом цикле, но и кинетику фракционного состава при непрерывной подаче сырья и отведении измельченного материала.

#### *Результаты исследования и выводы.*

1. Разработана математическая модель, описывающая кинетику изменения фракционного состава сырья в машине-измельчителе, учитывающая поступление и удаление материала из установки, раскрывающая многостадийный процесс превращения узких классов (фракций) материала во времени. Модель представлена системой дифференциальных уравнений (3) и позволяет учесть произвольный вид функций скоростей измельчения фракций и выхода продуктов измельчения.



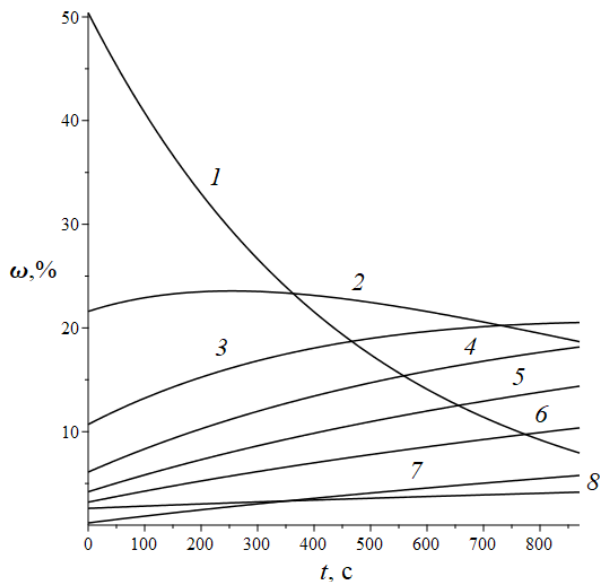


Рис. 4. Изменение фракционного состава коры при измельчении корорубкой КР-1203 (расчетные данные по математической модели, номер кривой соответствует номеру узкого класса в табл. 2)

Fig. 4. Changes in debarking waste fraction composition when shredded by КР-1203 (calculated data on the mathematical model, the number of the curve corresponds to the number of the class in Table 2)

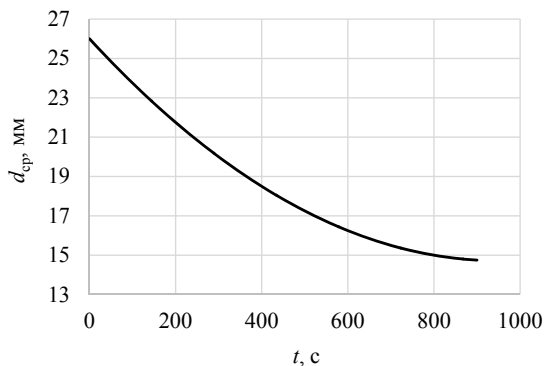


Рис. 5. Изменение средней крупности коры при измельчении на корорубке КР-1203

Fig. 5. Variation in average bark particle size at shredding on a chipper КР-1203

2. Оценка значений параметров математической модели на примере измельчения коры показала, что функция коэффициента пропорциональности в уравнении скорости измельчения узкого класса материала в зависимости от его линейного размера практически точно описывается степенным уравнением (7).

3. Результаты решения системы дифференциальных уравнений для измельчения коры при принятых исходных данных, полученные в программе Maple 2018, показали, что предложенная дифференциальная модель изменения фракционного состава материала при принятых предпосылках к расчету ее параметров качественно и количественно описывает известные экспериментальные данные с высокой точностью.

### Библиографический список

*Бадоев В.А., Лупанов А.П., Мурашов А.А.* Математическая модель измельчения старого асфальтобетона в электромагнитном поле // *Фундаментальные исследования.* 2012. № 3. С. 624–627.

*Бастриков Д.В., Власов Ю.Н., Кучер С.В., Куницкая Д.Е.* Экспериментальные исследования энергоемкости дробления отходов окорки ели // *Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии.* 2016. Вып. 217. С. 81–90.

*Бастриков Д.В., Власов Ю.Н., Ильюшенко Д.А., Кучер С.В.* Экспериментальные исследования энергоемкости дробления отходов окорки сосны // *Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии.* 2017. Вып. 219. С. 120–127.

*Бастриков Д.В.* Повышение энергоэффективности измельчения отходов окорки на оборудовании с ножевым рабочим органом: дис. ... канд. техн. наук. ВГЛТУ, 2018. 118 с.

*Бастриков Д.В., Власов Ю.Н., Кучер С.В.* Исследование энергоемкости измельчения отходов окорки установкой с ножевым рабочим органом // *Лесотехнический журнал.* 2018. Т. 8, № 1. С. 120–128.

*Гомонай М.В.* Производство топливных брикетов // *Древесное сырье, оборудование, технологии, режимы работы.* М.: Изд-во МГУЛ, 2006. 68 с.

*Ефимова Е.В.* Измельчение древесной коры на оборудовании с молотковыми рабочими органами: автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб.: СПбГЛТУ, 2013. 19 с.

*Кафаров В.В., Дорохов И.Н., Арутюнов С.Ю.* Системный анализ процессов химической технологии. М.: Наука, 1985. 396 с.

*Королев Л.В., Бытев Д.О.* Уравнение кинетики измельчения с произвольным законом распределения времени ожидания // *Моделирование и анализ информационных систем.* 2012. Т. 19, № 2. С. 53–61.

*Мардер М.В.* Опыт сжигания коры на целлюлозно-бумажных комбинатах. М., 1967. 159 с.

*Мюллер О.Д.* Совершенствование технологии производства древесных гранул: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Архангельск: САФУ, 2015. 31 с.

*Чибирев О.В.* Совершенствование процесса брикетирования отходов лесопереработки на гидравлическом прессовом оборудовании: дис. ... канд. техн. наук. ВГЛТУ. Воронеж, 2018. 121 с.

*Шувалов С.И., Михеев П.Г., Веренин А.А., Астаилов Н.С.* Математическая модель шаровой барабанной мельницы для анализа работы сепаратора пыли // Вестник ИГЭУ. 2009. № 3. С. 1–5.

*Hodolic J., Vukelic Dj., Agarski B., Hudjik C.* Briquetting of biomass and environmental engineering // Proceedings – Quality Festival 2007 – 2. Conference About Quality of Life, Kragujevac: Center for Quality – Faculty for Mechanical Engineering. P. 8, 11, May, 2007.

*Nilsson D., Bernesson S., Hansson P.* Pellet production from agricultural raw materials – A systems study // Biomass and Bioenergy. 2011. No. 35. P. 679–689.

*Rabier F., Temmerman M., Bohm T., Hartmann H., Daughbjerg P., Rathbauer J. et al.* Particle density determination of pellets and briquettes // Biomass and Bioenergy. 2006. No. 30. P. 954–963.

*Racz A., Csöke B.* Application of the product related stress model for product dispersity control in dry stirred media milling // International Journal of Mineral Processing. 2016. No. 157.

*Rhen C., Ohman M., Gref R., Wasterlund I.* Effect of raw material composition in woody biomass pellets on combustion characteristics // Biomass and Bioenergy. 2007. P. 66–72.

*Samuelsson R., Thyrel M., Sjöström M., Lestander T.* Effect of biomaterial characteristics on pelletizing properties and biofuel pellet quality // Fuel Processing Technology. 2009. No. 90. P. 1129–1134.

## References

*Badoev V.A., Lupanov A.P., Murashov A.A.* Matematicheskaja model' izmel'chenija starogo asfal'tobetona v jelektromagnitnom pole (Mathematical model of old asphalt concrete grinding in an electromagnetic field). *Fundamental'nye issledovanija*, 2012, no. 3, pp. 624–627. (In Russ.)

*Bastrikov D.V., Vlasov Ju.N., Kucher S.V., Kunickaja D.E.* Jeksperimental'nye issledovanija jenergoemkosti droblenija othodov okorki eli (Experimental research of power intensity of shredding of waste fir-tree peel). *Izvestija Sankt-Peterburgskoj lesotehničeskoj akademii*, 2016, is. 217, pp. 81–90. (In Russ.)

*Bastrikov D.V., Vlasov Ju.N., Il'jushenko D.A., Kucher S.V.* Jeksperimental'nye issledovanija jenergoemkosti droblenija othodov okorki sosny (Experimental research of power intensity of shredding of waste wood chips). *Izvestija Sankt-Peterburgskoj lesotehničeskoj akademii*, 2017, is. 219, pp. 120–127. (In Russ.)

*Bastrikov D.V.* Povyshenie jenergojeffektivnosti izmel'chenija othodov okorki na oborudovanii s nozhevym rabochim organom (Energy efficiency increase of edging waste grinding on equipment with knife working device). Diss. kand. tehn. nauk. VGLTU, 2018. 118 p. (In Russ.)

*Bastrikov D.V., Vlasov Ju.N., Kucher S.V.* Issledovanie jenergoemkosti izmel'chenija othodov okorki ustanovkoj s nozhevym rabochim organom (Energy intensity research of the casing waste grinding on the equipment with a knife working device). *Lesotekhnicheskij zhurnal*, 2018, vol. 8, no. 1, pp. 120–128. (In Russ.)

*Gomonaj M.V.* Proizvodstvo toplivnyh briketov. Drevesnoe syr'e, oborudovanie, tehnologii, rezhimy raboty (Production of the fuel briquettes. *Wood raw material, equipment, technologies, modes of operation*). M.: Izd-vo MGUL, 2006. 68 p. (In Russ.)

*Efimova E.V.* Izmel'chenie drevesnoj kory na oborudovanii s molotkovymi rabochimi organami (Shredding of the wood bark on the equipment with the hammer working bodies). Avtoreferat diss. kand. tehn. nauk. SPb.: SPbGGLTU, 2013. 19 p. (In Russ.)

*Kafarov V.V., Dorohov I.N., Arutjunov S.Ju.* Sistemyj analiz processov himicheskoj tehnologii (System analysis of the chemical technology processes). M.: Nauka, 1985. 396 p. (In Russ.)

*Korolev L.V., Bytev D.O.* Uravnenie kinetiki izmel'chenija s proizvol'nym zakonom raspredelenija vremeni ozhidaniya (The equation of the grinding kinetics with an arbitrary law of the waiting time distribution). *Model. i analiz inform. sistem*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 53–61. (In Russ.)

*Marder M.V.* Opyt szhiganija kory na celljulozno-bumazhnyh kombinatah (Experience of bark burning in pulp and paper mills). M., 1967. 159 p. (In Russ.)

*Mjuller O.D.* Sovershenstvovanie tehnologii proizvodstva drevesnyh granul (Improvement of the wood pellet production technology): avtoreferat dis. ... d-ra tehn. nauk. Arhangel'sk: SAFU, 2015. 31 p. (In Russ.)

*Chibirev O.V.* Sovershenstvovanie processa briketirovanija othodov lesopererabotki na gidravlicheskom pressovom oborudovanii (Improvement of the process of briquetting of the wood processing wastes on the hydraulic press equipment): dis. ... kand. tehn. nauk. VGLTU, 2018. 121 p. (In Russ.)

*Shuvalov S.I., Miheev P.G., Verenin A.A., Astashov N.S.* Matematicheskaja model' sharovoj barabannoj mel'nicy dlja analiza raboty separatora pyli (Mathematical model of a ball drum mill for the analysis of a dust separator operation). *Vestnik IGJeU*, 2009, no. 3, pp. 1–5. (In Russ.)

*Hodolic J., Vukelic Dj., Agarski B., Hudjik C.* Briquetting of biomass and environmental engineering, *Proceedings – Quality Festival 2007 – 2*. Conference About Quality of Life, Kragujevac: Center for Quality – Faculty for Mechanical Engineering, pp. 8, 11, May, 2007.

*Nilsson D., Bernesson S., Hansson P.* Pellet production from agricultural raw materials – A systems study. *Biomass and Bioenergy*, 2011, no. 35, pp. 679–689.

*Rabier F., Temmerman M., Bohm T., Hartmann H., Daugbjerg P., Rathbauer, J. et al.* Particle density determination of pellets and briquettes. *Biomass and Bioenergy*, 2006, no. 30, pp. 954–963.

*Racz A., Csöke B.* Application of the product related stress model for product dispersity control in dry stirred media milling. *International Journal of Mineral Processing*, 2016, no. 157.

*Rhen C., Ohman M., Gref R., Wasterlund I.* Effect of raw material composition in woody biomass pellets on combustion characteristics: *Biomass and Bioenergy*, 2007, pp. 66–72.

*Samuelsson R., Thyrel M., Sjöström M., Lestander T.* Effect of biomaterial characteristics on pelletizing properties and biofuel pellet quality. *Fuel Processing Technology*, 2009, no. 90, pp. 1129–1134.

*Материал поступил в редакцию 14.01.2020*

---

**Власов Ю.Н., Нестерова Е.В., Хитров Е.Г.** Исследование кинетики изменения фракционного состава измельчаемого древесного сырья // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2020. Вып. 230. С. 126–140. DOI: 10.21266/2079-4304.2020.230.126-140

В технике при изучении кинетики измельчения материалов пользуются математическими моделями в виде интегро-дифференциальных уравнений, решение которых трудоемко и не всегда приводит к получению наглядных результатов. Цель настоящей статьи – разработать математическую модель, раскрывающую кинетику изменения фракционного состава измельчаемых древесных материалов, позволяющую на практике проводить оценку фракционного состава обрабатываемого сырья во времени. Методы исследования – математический анализ, численные методы решения дифференциальных уравнений и обработки расчетных данных. Измельчение рассмотрено как многостадийный процесс, при котором фракции материала (узкие классы) под воздействием рабочего органа машины-измельчителя претерпевают превращения, происходящие как последовательно, так и параллельно, причем скорости превращений и доли вновь образованных узких классов материала определяются исходными размерами измельчаемых фракций и параметрами рабочего органа измельчителя. Предложена система дифференциальных уравнений, описывающая в общем превращения узких классов при измельчении, причем коэффициенты уравнений позволяют учесть произвольный вид функций скоростей измельчения фракций и выхода продуктов измельчения. Предложенная система является альтернативой

интегро-дифференциальному уравнению балансовой модели измельчения. Выполнена оценка значений параметров математической модели на примере измельчения коры. По результатам сопоставления результатов моделирования с экспериментальными данными, полученными предыдущими исследователями, установлено, что предложенная дифференциальная модель изменения фракционного состава материала при принятых предположениях к расчету ее параметров качественно и количественно описывает экспериментальные данные с высокой точностью.

**Ключевые слова:** кора, подготовка сырья, скорость измельчения, фракции, средняя крупность.

**Vlasov Yu.N., Nesterova E.V., Khitrov E.G.** Research of kinetics of change in fractional composition of wood raw materials being shredded. *Izvestia Sankt-Peterburgskoj Lesotekhnicheskoy Akademii*, 2020, is. 230, pp. 126–140 (in Russian with English summary). DOI: 10.21266/2079-4304.2020.230.126-140

In techniques at study of kinetics of shredding of materials use mathematical models in the form of the integral-differential equations, which solution is laborious and not always leads to reception of evident results. The purpose of this article is to develop a mathematical model, which reveals the kinetics of change in fractional composition of wood materials being shredded, allowing in practice to evaluate the fractional composition of the processed raw materials in time. Methods of research include mathematical analysis, numerical methods for solving differential equations and processing of calculated data. Shredding is considered as multistage process at which fractions of a material (narrow classes) under the influence of a working body of the shredder machine undergo transformations occurring both consistently and in parallel, and rates of transformations and a share of again formed narrow classes of the material are defined by initial sizes of shredded fractions and parameters of the working body. The system of the differential equations describing in the general transformation of narrow classes at grinding is offered, and factors of the equations allow to consider any kind of functions of speeds of grinding of fractions and the output of shredding products. The proposed system is an alternative to the integral-differential equation of the balance shredding model. The estimation of values of parameters of the mathematical model on an example of bark shredding is carried out. By results of comparison of results of modeling with the experimental data received by previous researchers it is established that the offered differential model of change of fractional composition of the material at the accepted preconditions to calculation of its parameters qualitatively and quantitatively describes the experimental data with high accuracy.

**Key words:** bark, raw material processing, shredding speed, fractions, average particle size.

**ВЛАСОВ Юрий Николаевич** – научный сотрудник Якутской государственной сельскохозяйственной академии. SPIN-код: 8799-9271.

677007, ш. Сергеляхское 3 км, д. 3, г. Якутск, Россия. E-mail: gnvlasov@yandex.ru

**VLASOV Jurij N.** – researcher of the Yakutsk State Agricultural Academy, SPIN-code: 8799-9271.

677007. av. Sergeliakhskoje. Yakutsk. Russia. E-mail: gnvlasov@yandex.ru

**НЕСТЕРОВА Евгения Владимировна** – соискатель кафедры технологических процессов и машин лесного комплекса Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета имени С.М. Кирова.

194021, Институтский пер., д. 5, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: jenechka-72@mail.ru

**NESTEROVA Evgenia V.** – applicant of the department of technological processes and machines of the forest complex of St.Petersburg State Forest Technical University.

194021. Institute per. 5. St. Petersburg. Russia. E-mail: jenechka-72@mail.ru

**ХИТРОВ Егор Германович** – доцент кафедры технологических процессов и машин лесного комплекса Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета имени С.М. Кирова.

194021, Институтский пер., д. 5, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: yegorkhitrov@gmail.com

**KHITROV Egor G.** – Associate Professor of the Department of Technological Processes and Machines of the Forest Complex of St.Petersburg State Forest Technical University.

194021. Institutskiy per. 5. St. Petersburg. Russia. E-mail: yegorkhitrov@gmail.com