УДК 630.3

С.М. Базаров, А.Н. Чубинский, И.В. Бачериков, Ф.Р. Базаров, И.К.Говядин

ЭЛЕМЕНТЫ ОСНОВ МЕХАНИКИ ДРЕВЕСНОЙ СРЕДЫ

Введение. В термомеханических технологиях деревопереработки и резания материал древесины приобретает сложные деформационные свойства от усложненных упругих до неупругих, таких как эластичность и пластичность. С позиции механики сплошных сред материал древесины можно рассматривать как древесную среду в виде пористого тела, в котором древесинное вещество имеет пустоты, заполненные газом или жидкостью [Ефимов, Новиков, 2001; Уголев, 1986], поэтому она представляет собой гетерогенную среду, физико-механические свойства которой будут зависеть от её многофазных компонентов [Нигматулин, 1978; Патякин, Тишин, Базаров, 1990]. Наличие пустот приводит к необходимости рассматривать материал древесины в силовых полях как сжимаемую среду. Пористость среды определяется отношением объема пустого пространства к общему объёму, занимаемого телом; объёмная пористость определяется по формуле

$$n_0 = 1 - \rho / \rho_*,$$

где ρ – плотность древесины в абсолютно сухом состоянии; ρ_* – плотность древесинного вещества.

Сопряженным параметром объёмной пористости служит представление объемной древесинности:

$$m = 1 - n_0,$$

на основании которой определяется плотность древесного материала:

$$\rho = \rho_* m. \tag{1}$$

При исследовании структуры древесины выделяют также поверхностную пористость как отношение площади пор к площади выделенного сечения:

$$n_* = 1 - q_0 / q,$$

и сопряженную с ней поверхностную древесинность

$$n_{**} = 1 - n_*, \tag{2}$$

здесь q_0 – площадь пор; q – площадь сечения.

Материал древесины имеет сложную анизотропную структуру [Ашкенази, 1970], но для построения уравнений движения материала древесины как деформируемого тела примем гипотезу однородности.

В термоакустических полях материал древесины от упруго-эластичного состояния переходит в текучее [Базаров, Семенова, 2007], что создает предпосылки для создания инновационных высокоэффективных технологий деревопереработки.

Целью исследования становится построение математической модели замкнутой системы уравнений движения сжимаемого деформируемого материала древесины на основании представлений законов сохранения механики сплошной среды.

Методы исследования. При построении механики древесной среды воспользуемся общим феноменологическим подходом в механике гетерогенной среды к построению уравнений неразрывности и движения в напряжениях, которые связывают пространственные градиенты напряжений с объемными силами и инерции [Лодж, 1969; Седов, 1970]. Для замыкания уравнений движения материала древесины примем реологическую модель Кельвина для вязкоупругого тела [Чубинский, 1980], дополненную параметром пластичности.

Результаты исследования. Для древесинно-газовой модели материала древесины уравнения движения при условии пренебрежения объемными силами и конвекцией принимают вид:

$$\begin{aligned} \rho\, \partial u/\partial t &= n_{**}\,(\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z),\\ \rho\, \partial v/\partial t &= n_{**}\,(\partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{yz}/\partial z),\\ \rho\, \partial w/\partial t &= n_{**}\,(\partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y + \partial\sigma_z/\partial z), \end{aligned} \tag{3}$$

здесь u, v, w – скорости движения вдоль прямоугольных координат x, y, z; σ – нормальное напряжение (нижний индекс указывает ось, параллельно которой действует напряжение); τ – касательное напряжение (нижние два индекса: первый указывает к какой оси перпендикулярна рассматриваемая элементарная площадка, а второй – ось, параллельно которой действует касательное напряжение); t – время.

С учетом (1) система уравнений движения (3) примет вид

$$\begin{aligned} \rho_*\, m\, \partial u/\partial t &= n_{**}\,(\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z),\\ \rho_*\, m\, \partial v/\partial t &= n_{**}\,(\partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{yz}/\partial z),\\ \rho_*\, m\, \partial w/\partial t &= n_{**}\,(\partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y + \partial\sigma_z/\partial z), \end{aligned} \tag{4}$$

для однородной среды можно принять условие $m \approx n_{**}$, тогда получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_* \partial u/\partial t &= (\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z), \\ \rho_* \partial v/\partial t &= (\partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{yz}/\partial z), \\ \rho_* \partial w/\partial t &= (\partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y + \partial\sigma_z/\partial z). \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение неразрывности при движении сжимаемого материала древесины имеет вид [Шлихтинг, 1969]:

$$\partial \rho / \partial t + \partial \rho u / \partial x + \partial \rho v / \partial y + \partial \rho w / \partial z = 0. \quad (6)$$

Из условия постоянства плотности древесинного вещества уравнение неразрывности принимает вид:

$$\partial m / \partial t + \partial m u / \partial x + \partial m v / \partial y + \partial m w / \partial z = 0, \quad (7)$$

или

$$\partial m / \partial t + div\, U_* = 0,$$

где $U_* = m(i\, u + j\, v + k\, w)$, при стационарных условиях (7) переходит в

$$\partial m u / \partial x + \partial m v / \partial y + \partial m w / \partial z = 0, \quad (8)$$

здесь i, j, k – единичные орты вдоль соответствующих координат x, y, z.

В феноменологической модели движения материала древесины оператора нестационарности представим в координатном виде:

$$\partial /\partial \mathrm{t} = \partial g / \partial g\, \mathrm{t} = \partial g / \partial \mathrm{l},$$

здесь g – скорость (акустическая), координата l ортогональна прямоугольной системе координат x, y, z.

Тогда уравнение неразрывности (7) можно переписать в 4-компонентном виде:

$$\partial mg / \partial l + \partial m u / \partial x + \partial m v / \partial y + \partial m w / \partial z = 0, \quad (9)$$

введением виртуальной 4-й прямоугольной координаты l можно записать обобщенную скорость в виде:

$$U = i\, mu + j\, mv + k\, mw + omg_{,,} \quad (10)$$

и представить уравнение неразрывности для материала древесины в виде:

$$div\, U = 0.$$

здесь o – единичный орт в направлении прямоугольной оси l.

Для построения картины деформации материала древесины введем следующие представления:

– относительное объемное изменение материала

$$d(\delta V) / \delta V = e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_{l,} \quad (11)$$

– вектор смещения

$$s = m\,(ia + jb + kc + of), \tag{12}$$

– скорость вектора смещения

$$ds\,/dt = d(i\,a + j\,b + k\,c + of)\,/\,dt, \tag{13}$$

здесь ε – деформация удлинения (нижний индекс указывает на параллельность соответствующей оси). Из уравнений (11) и (12) следует

$$e = div\,s = \partial\,a\,/\partial x + \partial b\,/\partial y + \partial c\,/\partial z + \partial f\,/\partial l, \tag{13a}$$

здесь $\varepsilon_x = \partial\,a\,/\partial x$, $\varepsilon_y = \partial b\,/\partial y$, $\varepsilon_z = \partial c\,/\partial z$, $\varepsilon_l = \partial f\,/\partial l$.

Запишем осредненное значение относительного объемного изменения материала древесины

$$e_0 = ¼\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_l). \tag{13b}$$

При движении материала древесины по компонентным скоростям (10) соответствуют скорости вектора смешения (13)

$$U = m\,(iu + jv + kw + og) = ds/dt, \tag{14}$$

поэтому

$$m\,u = da\,/dt,\ mv = d\,b\,/dt,\ mw = d\,c\,/dt,\ mg = df/dt \tag{15}$$

результаты интегрирования представим в виде

$$a = \int mudt - h_x,\quad b = \int mvdt - h_y,\quad c = \int mwdt - h_z,\quad f = \int mg\,dt - h_l, \tag{16}$$

тогда можно записать:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_x = \partial a\,/\partial x = \partial(\int mudt)\,/\partial x - e_0,\ e_0 = \partial h_x/\partial x,\\
\varepsilon_y = \partial b\,/\partial y = = \partial(\int mvdt)\,/\partial y - e_0,\ e_0 = \partial h_y/\partial y,\\
\varepsilon_z = \partial c\,/\partial z = \partial(\int mwdt)\,/\partial z - e_0,\ e_0 = \partial h_x/\partial z,\\
\varepsilon_l = \partial f\,/\partial l = \partial(\int mgdt)\,/\partial l - e_0,\ e_0 = \partial h_l/\partial l,\\
d\varepsilon_x\,/dt = \partial\,mu\,/\partial x + 1/3\ \partial mg/\partial l = \eta_x,\\
d\varepsilon_y\ dt = \partial\,mv\,/\partial y + 1/3\ \partial mg/\partial l = \eta_y,\\
d\varepsilon_w\,/dt = \partial\,mw\,/\partial z + 1/3\ \partial mg/\partial l = \eta_z,\\
d\varepsilon_l\,/dt = \partial mg\,/\partial l = \eta_l,\\
\gamma_{xy} = \partial a\,/\partial y + \partial b\,/\partial x = \partial(\int mudt)\,/\partial y + \partial(\int mvdt)\,/\partial x,\\
\gamma_{yz} = \partial b\,/\partial z + \partial c\,/\partial y = \partial(\int mvdt)\,/\partial z + \partial(\int mwdt)\,/\partial z,\\
\gamma_{zx} = \partial\,c\,/\partial x + \partial a\,/\partial z = \partial(\int mwdt)\,/\partial x + \partial(\int mudt)\,/\partial z,\\
d\gamma_{xy}\,/dt = \partial mu\,/\partial y + \partial mv\,/\partial x = \eta_{xy},\\
d\gamma_{yz}\,/dt = \partial mv\,/\partial z + \partial mw\,/\partial y = \eta_{yz},\\
d\gamma_{zx}\,/dt = \partial mw\,/\partial x + \partial mu\,/\partial z = \eta_{zx},\\
div\ U = de/dt = 0,
\end{gathered} \tag{17}$$

здесь γ – угол сдвига (нижние два индекса указывают изменение угла между соответствующими осями).

Дополнив пластическим параметром реологическую модель Кельвина, получаем уравнения вязко-упруго-пластического состояния материала древесины, позволяющие замкнуть уравнения движения:

– для нормальных напряжений

$$\sigma = \sigma_* + t_{r*}\, d\sigma_* /dt = E\varepsilon + \mu_*\, d\varepsilon /dt + K_*, \tag{18}$$

– для касательных напряжений

$$\tau = \tau_* + t_r\, d\tau_* /dt = G\gamma + \mu\, d\gamma /dt + K, \tag{19}$$

здесь t_r – время релаксации; μ – вязкость; K – пластичность; E – модуль упругости; G – модуль сдвига γ.

С учетом представлений (17)–(19) получаем

$$\begin{gathered}
\sigma_x = -p + E \int mudt) + \mu_* \eta_x + K_*,\\
\sigma_y = -p + E \int mvdt) + \mu_* \eta_y + K_*,\\
\sigma_z = -p + E(\int mwdt + \mu_* \eta_z + K_*,\\
\gamma_{xy} = G \int \eta_{xy}\, dt + \mu\, \eta_{xy} + K,\\
\gamma_{yz} = G \int \eta_{yz}\, dt + \mu\, \eta_{yz} + K,\\
\gamma_{zy} = G \int \eta_{zy}\, dt + \mu\, \eta z_y + K,
\end{gathered} \tag{20}$$

здесь давление $p = E\, e_0$.

Уравнения движения вязко-упруго-пластического материала древесины принимают вид:

$$\begin{gathered}
P_* \partial u /\partial t = -\partial p /\partial x + \partial /\partial x\, [\, E \int \eta_{x*}\, dt + \mu_* \eta_x + K_*] + \\
+ \partial /\partial y\, [\, G\int \eta_{xy}\, dt + \mu\, \eta_{xy} + K] + \partial /\partial z\, [\, G\int \eta_{zx}\, dt + \mu\, \eta_{zx} + K];
\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}
P_* \partial v /\partial t = -\partial p /\partial y + \partial /\partial x\, [G\int \eta_{xy}\, dt + \mu\, \eta_{xy} + K] + \\
+ \partial /\partial y\, [\, E \int \eta_y\, dt + \mu_* \eta_y + K_*] + \partial /\partial z\, [\, G\int \eta_{yz}\, dt + \mu\, \eta_{yz} + K];
\end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered}
P_* \partial w /\partial t = -\partial p /\partial z + \partial /\partial x\, [\, G\int \eta_{zx}\, dt + \mu\, \eta_{zx} + K] + \\
+ \partial /\partial y\, [\, G\int \eta_{yz}\, dt + \mu\, \eta_{yz} + K] + \partial /\partial z\, [\, E \int \eta_z\, dt + \mu\, \eta_{z*} + K_*].
\end{gathered} \tag{23}$$

В первом приближении зависимость сжимаемости древесины от давления можно представить в виде

$$m = m_0 + (p - p_0) / \rho_* K,$$

где K – модуль объемной упругости.

Рассмотрим стационарное слоистое (одна компонента скорости) плоское движение вязко-упруго-пластического материала древесины в канале, ограниченном двумя параллельными плоскими стенками, отстоящих друг от друга на расстоянии $2h$. В этом случае движение описывается уравнением:

$$dp /dx = d /dy\, [G\int mu\, dt + \mu_*\, dmu/dy + K], \tag{24}$$

Из условия $\partial p/\partial y = 0$, следует, что dp/dx = const, поэтому выполнив интегрирование при $y = h$, скорость $u = 0$, получаем:

$$mu = -\mu_*^{-1}\left[\tfrac{1}{2}(dp/dx)(h^2 - y^2) - Gt\int_y^h u\,dy - K(h - y)\right], \qquad (25)$$

при $K = G = 0$ приходим к известному представлению течения Куэтта [Шлихтинг, 1969].

Стационарному слоистому вязко-упруго-пластическому движению древесной среды в цилиндрическом канале соответствует уравнение:

$$dp/dz = r^{-1} d/dr[[r(G\int mw\,dt + \mu_*\,dmw/dr + K)], \qquad (26)$$

Из условия $\partial p/\partial r = \partial p/\partial \phi = 0$, следует, что dp/dz = const, поэтому выполнив интегрирование при $r = R$, скорость $w = 0$, получаем:

$$m\,w = -\mu_*^{-1}\left[\tfrac{1}{4}(dp/dz)(R^2 - r^2) - Gt\int_r^R w\,dz - K(R - r)\right], \qquad (27)$$

при $K = G = 0$ приходим к известному представлению течения Хагена-Пуазейля [Шлихтинг, 1969].

Выводы. Создание новых высоко эффективных технологий деревопереработки и резания материала древесины путем применения интенсивных термоакустических полей должно основываться на решении задач механики древесной среды, построенных на феноменологическом представлении законов сохранения в механике сплошной среды. Материал древесины является растительным полимером, поэтому выполненные исследования будут полезными для анализа движения природных композитов, применяемых в современных инновационных технологиях.

Библиографический список

Ашкенази Е.К. Анизотропия древесины и древесных материалов. М.: Лесн. пром-ть, 1970. 224 с.

Базаров С.М., Семенова Н.И. Движение материала древесины в вязкотекучем состоянии. СПб.: СПбЛТА, 2007. 68 с.

Ефимов В.Е., Новиков В.А. Модели и акустические свойства древесины. Петрозаводск: ПГУ, 2001. 296 с.

Лодж А. С. Эластичные жидкости. М.: Наука, 1969. 464 с.

Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред.М.: Наука, 1978. 338 с.

Патякин В.И., Тишин Ю.Г., Базаров С.М. Техническая гидродинамика древесины. М.: Лесн. пром-сть, 1990. 304 с.

Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.

Уголев Б.Н. Древесиноведение с основами лесного товароведения. М.: Лесн. пром-сть, 1986. 368 с.

Чубинский А.Н. Экспериментальное обоснование реологической модели пакета шпона при склеивании // Технология и оборудование деревообрабатывающих производств: Междунар. сб. науч. тр. Л.: ЛТА, 1980. С. 34–37.

Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука,1969. 742 с.

References

Ashkenazi E.K. Anisotropy of wood and wood materials. Moscow: Lesn. prom-t, 1970. 224 p.

Bazarov S.M., Semenova N.I. Movement of wood material in a viscous state. SPb.: SPbSTU, 2007. 68 p.

Efimov V.E., Novikov V.A. Models and acoustic properties of wood. Petrozavodsk: PSU, 2001. 296 p.

Lodge A. S. Elastic liquids. Moscow: Nauka, 1969. 464 p.

Nigmatulin R. *I.* Fundamentals of heterogeneous media mechanics. Moscow: Nauka, 1978. 338 p.

Patyakin V. I., Tishin Yu. G., Bazarov S. *M.* Technical hydrodynamics of wood. Moscow: Lesn. prom-st, 1990. 304 p.

Sedov L.I. Continuum Mechanics. Vol. 1. Moscow: Nauka, 1970. 492 p.

Ugolev B.N. Wood science with the basics of forest commodity science. Moscow: Lesn. prom-st, 1986. 368 p.

Chubinsky A.N. Experimental substantiation of the rheological modeling of the veneer package during gluing. *Technology and equipment of woodworking industries. International collection of scientific papers*. L.: LTA, 1980, pp. 34–37.

Shlichting G. Theory of the boundary layer. Moscow: Nauka,1969. 742 p.

Материал поступил в редакцию 30.03.2020

Базаров С.М., Чубинский А.Н., Бачериков И.В., Базаров Ф.Р., Говядин И.К. Элементы основ механики древесной среды // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2020. Вып. 231. С. 141–150. DOI: 10.21266/2079-4304.2020.231.141-150

В технологиях деревопереработки и резания используется широкий спектр силовых полей различной физической природы (механической, тепловой, электромагнитной, акустической и др.) воздействия на материал древесины, в результате которого происходит формирование сложного деформируемого состояния от упругого до неупругого, таких как эластичность и пластичность. С позиции механики сплошной среды материал древесины является гетерогенным телом, имеющим сложную пространственно-временную пористую структуру, которая заполняется различными фазами (газ, жидкость). Широкое применение древесины в народном хозяйстве ставит задачу выделения её из гетерогенной среды в достаточно самостоятельную древесную среду, характеризующуюся своими специфическими закономерностями. В древесиноведении сложная анизотропность пористой структуры описывается в трех взаимно ортогональных направлениях: продольном, тангенциальном и радиальном. При построении начал механики древесной среды приняты допущения однородности, сплошности и сжимаемости, согласно которым параметры в математической модели (упругость, вязкость, пористость, пластичность, плотность) применяются в результате пространственно-временного осреднения. Фактор сжимаемости при нестационарности приводит к расширению компонентности пространства движения. В основе построенной математической модели лежит связность вектора скорости смещения деформации с вектором скорости движения, характеризующего текучесть, при соблюдении уравнения неразрывности сжимаемой среды. Представленное исследование может найти широкое применение, включая инновационные технологии.

Ключевые слова: древесиноведение, сжимаемость, неразрывность, пористость, текучесть.

Bazarov S.M., Chubinsky A.N., Bacherikov I.V., Bazarov F.R., Goviadin I.K. Elements of the basics of wood environment mechanics. *Izvestia Sankt-Peterburgskoj Lesotehniceskoj Akademii*, 2020, is. 231, pp. 141–150 (in Russian with English summary). DOI: 10.21266/2079-4304.2020.231.141-150

Wood processing and cutting technologies use a wide range of force fields of various physical nature (mechanical, thermal, electromagnetic, acoustic, etc.) that affect the wood material, resulting in the formation of a complex deformable state from elastic to inelastic, such as elasticity and plasticity. From the point of view of continuum mechanics, the wood material is a heterogeneous body with a complex spatial-temporal structure a porous structure that is filled with various phases (gas, liquid). The widespread use of wood in the national economy sets the task of separating it from a heterogeneous environment into a fairly independent wood environment characterized by its own specific patterns. In wood science, the complex anisotropy of a porous structure is described in three mutually orthogonal directions: longitudinal, tangential, and radial. When constructing the principles of mechanics of the wood environment, the assumptions of uniformity, continuity and compressibility are accepted, according to which the parameters in the mathematical model (elasticity, viscosity, porosity, plasticity, density) are applied as a result of space-time averaging. The compressibility factor in non-stationary conditions leads to an expansion of the component space of motion. The mathematical model is based on the connectivity of the displacement velocity vector of the strain with the velocity vector of the movement that characterizes the fluidity, while observing the continuity equation of the compressible medium. The presented research can be widely applied, including innovative technologies.

Keywords: wood science, compressibility, continuity, porosity, fluidity.

БАЗАРОВ Сергей Михайлович – старший научный сотрудник, профессор кафедры технологических процессов и машин лесного комплекса Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета имени С.М. Кирова, доктор технических наук.

194021, Институтский пер. д. 5, лит. У, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: s.bazarow@yandex.ru

BAZAROV Sergei M. – DSc (Technical), Professor of the Technological processes and machines of the forest complex department, St.Petersburg State Forest Technical University.

194021. Institutsky per. 5. Let. U. St. Petersburg. Russia. E-mail: s.bazarow@yandex.ru

ЧУБИНСКИЙ Анатолий Николаевич – профессор, зав. кафедрой технологии материалов, конструкций и сооружений из древесины Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета имени С.М. Кирова, доктор технических наук.

194021, Институтский пер. д. 5, лит. У, Санкт-Петербург, Россия.

CHUBINSKY Anatoly – DSc (Technical), Professor, chair of the Technology of materials and wood structures department, St.Petersburg State Forest Technical University.

194021. Institutsky per. 5. Let. U. St. Petersburg. Russia.

БАЧЕРИКОВ Иван Викторович – доцент кафедры технологических процессов и машин лесного комплекса Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета имени С.М. Кирова, кандидат технических наук. SPIN-код: 7210-3600 ResearcherID: K-6350-2017.

194021, Институтский пер. д. 5, лит. У, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: ivashka512@gmail.com

BACHERIKOV Ivan V. – PhD (Technical), associate professor of Technological processes and machines forest complex department, St.Petersburg State Forest Technical University, SPIN-code: 7210-3600 ResearcherID: K-6350-2017

194021. Institutsky per. 5. Let. U. St. Petersburg. Russia. E-mail: ivashka512@gmail.com

БАЗАРОВ Филипп Романович – ассистент кафедры компьютерного моделирования и компьютерной графики Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета имени С.М. Кирова.

194021, Институтский пер. д. 5, лит. У, Санкт-Петербург, Россия.

BAZAROV Philipp R. – assistant of the Department of «Computer modeling and computer graphics», St.Petersburg State Forest Technical University.

194021. Institutsky per. 5. Let. U. St. Petersburg. Russia.

ГОВЯДИН Илья Константинович – аспирант Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета имени С.М. Кирова.

194021, Институтский пер. д. 5, лит. У, Санкт-Петербург, Россия.

GOVIADIN Ilya K. – PhD student of St.Petersburg State Forest Technical University.

194021. Institutsky per. 5. Let. U. St. Petersburg. Russia.